

۱. این مقاله از متن سخنرانی ایراد شده در دومین همایش هوش مصنوعی و علوم ریاضی که در فرهنگستان علوم برگزار شد نوشته شده است.

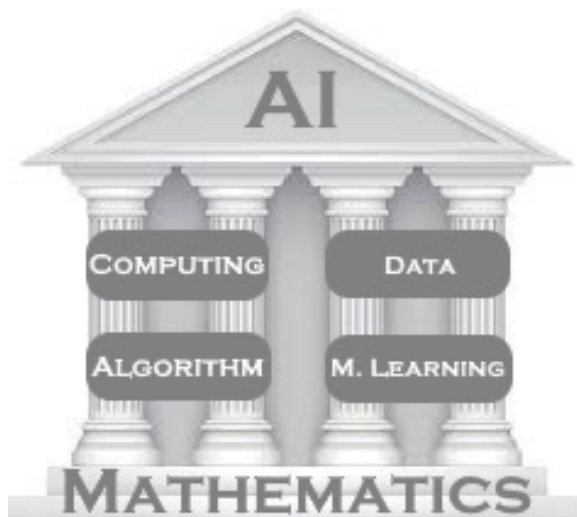
۲- دو سوال از هوش مصنوعی

دو سوال از هوش مصنوعی ChatGPT (به عنوان پیشروترین هوش مصنوعی) پرسیده شد که پاسخ آنها ارائه می‌شود. هدف از این سوالات تعیین تکلیف در خصوص ارتباط بین ریاضی، هوش مصنوعی و تاثیر علوم ریاضی در پیشرفت هوش مصنوعی است.

سوال اول: آیا بخشی از ریاضیات وجود دارد که در رشد هوش مصنوعی تاثیری نداشته باشد؟ یعنی آیا می‌توان یکی از مباحث ریاضی را نام برد که در هیچ قسمتی از الگوریتم‌ها، هوش مصنوعی، و یادگیری ماشین کاربرد نداشته باشد؟

پاسخ [۱] ChatGPT: تقریباً تمام شاخه‌های اصلی ریاضیات در برخی جنبه‌های هوش مصنوعی (AI) و یادگیری ماشین^۲ (ML) تأثیرگذار بوده‌اند. هوش مصنوعی و یادگیری ماشین به طور گسترده‌ای از مباحث مختلف ریاضی استفاده می‌کنند، از جمله:

- جبر خطی: در پردازش داده‌ها و شبکه‌های عصبی.



شکل ۲: دو مسیر تکوین هوش مصنوعی مبتنی بر علوم ریاضی [۱]

- آمار و احتمال: برای مدلسازی عدم قطعیت و یادگیری.
- آنالیز ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال: در بهینه‌سازی و یادگیری تدریجی.
- نظریه اطلاعات: در فشرده‌سازی داده و تفسیر نتایج.
- هندسه و توپولوژی: در تفسیر داده‌های پیچیده و یادگیری هندسی.

شاید بتوان گفت شاخه‌هایی از ریاضیات که بسیار تخصصی، و کاربردی محدودتر دارند ممکن است در برخی از حوزه‌های AI و ML کمتر استفاده شوند. برای مثال، مباحثی مانند نظریه اعداد محض، که بیشتر در رمزنگاری و دیگر زمینه‌های بسیار خاص کاربرد دارد، تاکنون تأثیر مستقیمی در الگوریتم‌های هوش مصنوعی و یادگیری ماشین نداشته است. با این حال، حتی این نوع از مباحث نیز ممکن است در آینده یا در پروژه‌های خاص کاربرد پیدا کنند. به طور کلی، به دلیل گستردگی هوش مصنوعی و یادگیری ماشین، نمی‌توان به طور قطعی گفت که بخشی از ریاضیات به هیچ وجه در آن کاربرد ندارد.

پاسخ [۱] ChatGPT: سؤال بسیار جالبی است! اگر تمام اجزا و توانایی‌های ریاضی را از هوش مصنوعی حذف کنیم، به سختی می‌توان گفت که سیستم هوش مصنوعی کار خواهد کرد. در واقع، ریاضیات زیرساخت اصلی برای تمام الگوریتم‌ها و فرآیندهای یادگیری هوش مصنوعی است. بیایید این موضوع را از چند زاویه بررسی کنیم:...

اگر ریاضیات را کاملاً از هوش مصنوعی حذف کنیم، به معنای حذف شالوده آن است. حتی ساده‌ترین سیستم‌های هوش مصنوعی، مانند

سوال دوم: ممنونم. پس می‌توان گفت که تمام اجزا ریاضی در هوش مصنوعی کاربرد دارند و این کاربردها به مرور بیشتر هم خواهد شد. حالا سوالم را برعکس می‌پرسم. آیا در هوش مصنوعی موضوعی هست که بدون ریاضی کار کند؟ منظور من گرافیک و ارتباطات با انسان‌ها از نظر تعامل فیزیکی و با موارد حقوقی و اخلاقی نیست. منظور من هوشمندی سیستم‌هاست. منظور من این است که اگر تمام اجزا و توانایی‌های ریاضی را از هوش مصنوعی بگیریم آیا همچنان می‌توان گفت که هوش مصنوعی داریم؟

سیستم‌های مبتنی بر قوانین (rule-based systems) که ممکن است به صورت ظاهری به ریاضیات وابسته نباشند، همچنان برای پردازش داده‌ها و تصمیم‌گیری به نوعی از عملیات ریاضیاتی استفاده می‌کنند.

پاسخ‌های هوش مصنوعی با پاسخ‌های نویسنده و اغلب پژوهشگران یکی است و در واقع می‌توان موضوع ارتباط بین ریاضی و هوش مصنوعی را تمام شده دید. این کاربرد در هر دو مسیر توسعه هوش مصنوعی (مسیر الگوریتمی و مسیر یادگیری عمیق) صادق است. شکل‌های ۲ و ۳ این ارتباط را نشان می‌دهند.



شکل ۳: ریاضی شالوده هوش مصنوعی [۱]

بنابراین از این پس هدف، اثبات تاثیر ریاضی در هوش مصنوعی نیست و به جای آن، مسائل دقیق در هوش مصنوعی را مطرح و به کمک ریاضی حل می‌کنیم. ضمناً باید یادآوری شود که در این بحث منظور ما از هوش مصنوعی موضوعات حاشیه‌ای آن نیست. منظور ما این نیست که اخلاق در عصر هوش مصنوعی در کجا قرار می‌گیرد. اینکه آیا باید از هوش مصنوعی یا رشد آن ترسید و یا خیر؟ آیا هوش مصنوعی باهوش‌تر از انسان خواهد شد و بر انسان مسلط خواهد شد؟ در این مقاله موضوع اصلی این نیست که حریم خصوصی در اکوسیستم دیجیتال در چه وضعی قرار خواهد داشت. در این ارائه، صرفاً هسته علمی هوش مصنوعی مد نظر است و از این موضوعات حاشیه‌ای (شکل ۴) عبور می‌کنیم.



شکل ۴: حواشی هوش مصنوعی

۳- کلیدی‌ترین بخش ریاضی

مصنوعی وارد دنیای ریاضی و سپس حل می‌شوند. مدل‌سازی ریاضی این ویژگی را دارد و در واقع پل بین دو دنیای واقعی و هوش مصنوعی است (شکل ۵). مدل‌سازی ریاضی فرایندی است که بتوان با استفاده از آن، رفتارهای طبیعی، اجتماعی، فرهنگی، ... را به زبان ریاضی بیان کرد. مدل‌سازی پلی ازدنیای کیفی به اکوسیستم کمی و توصیف یک سیستم با استفاده از ریاضی است

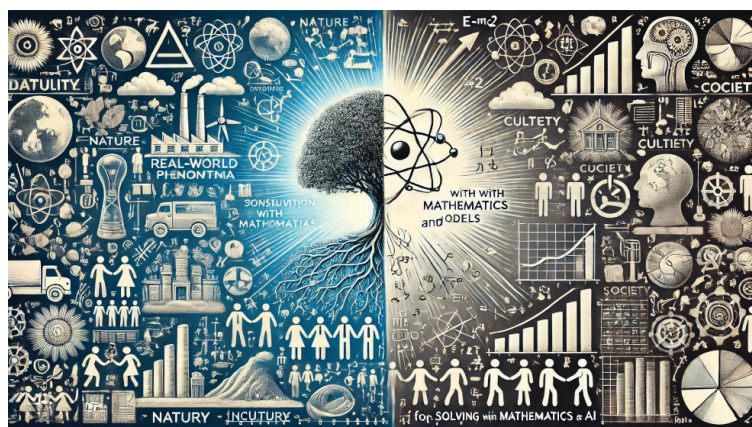
اما کلیدی‌ترین بخش علوم ریاضی در این رابطه چیست؟ مشخص است که بخش‌هایی از ریاضی مانند منطق، حسابان، جبرخطی، گراف، هندسه و موضوعات دیگر تاثیرات مستقیم و زیادی در هوش مصنوعی دارند. اما هدف، مقایسه آنها باهم نیست. هدف از این بخش، معرفی قسمتی از ریاضی است که رابط بین دو دنیای دیجیتال و واقعی است و با کمک آن است که مسائل دنیای هوش

که منجر به بیان و حل مسائل مربوط به آن سیستم می‌شود.

در این میان برخی مدل‌سازی‌ها ساده و گاهی بسیار سخت است. هنگامی که حرکت خطی یک شی متحرک در فیزیک با داشتن تمام جزئیات مطرح است ممکن است مدل‌سازی و حل آن ساده باشد. اما قطعاً مدل‌سازی مفاهیمی مانند عدالت، خواب‌آلودگی، شرافت، مستی، افسردگی، تعادل و خیلی موضوعات دیگر کار سختی است. این دنیا، هنوز کاستی‌های زیادی دارد که صرفاً به دست علوم ریاضی و داده‌های متنوع و فراوان قابل کنترل و حل در دنیای هوش مصنوعی هستند (شکل ۶).



شکل ۵: حواشی هوش مصنوعی



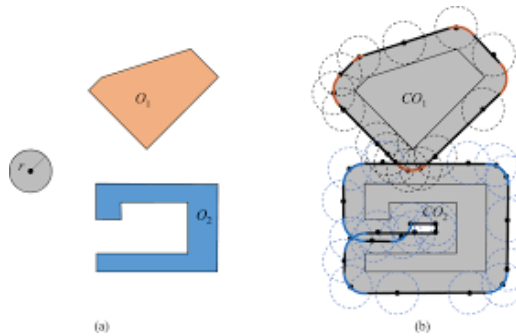
شکل ۶: حواشی هوش مصنوعی

۴- مثال‌هایی از هندسه و ربات

از هر کس که اندکی در حوزه هوش مصنوعی کار کرده است می‌توان در مورد کاربرد ماتریس در هوش مصنوعی پرسید. این مفاهیم چنان فراگیر هستند که در همه جا به چشم می‌خورند. اما در این بخش می‌خواهیم موضوعاتی کمتر شنیده شده را به مسائل دنیای دیجیتال مرتبط ساخته، حرف‌های جدیدتری بزنیم. این کار را با ارائه مثال انجام خواهیم داد.

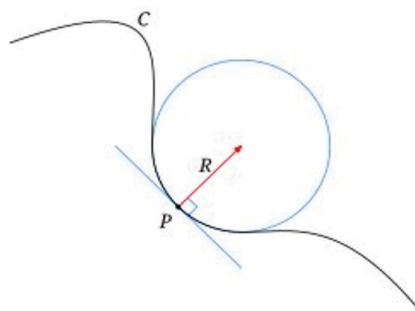
لمس و برق گرفتگی [۲]: در موضوع حرکت ربات، دو حالت متفاوت رخ می‌دهد که در آن ربات اجازه برخورد با موانع را دارد

و یا ندارد. محیط حرکت ربات ممکن است طوری باشد که ربات اجازه داشته باشد به برخی از موانع (مانند دیوار، چهارچوب در، ...) برخورد کند و به مسیر خود ادامه دهد ولی اجازه کوچک‌ترین برخوردی به برخی از موانع دیگر مانند موانع با خطر برق گرفتگی یا سوختگی را نداشته باشد. این مساله با تعریف مجموعه باز و بسته برای موانع قابل حل است. در موانع با عدم اجازه برخورد، تمام نقاط حدی موانع (دقیقاً طبق تعریف ریاضی) عضو خود مانع هستند و امکان لمس موانع وجود ندارد ولی برای موانع مجاز، نقاط حدی آنها عضو مانع نیستند و می‌توان با لمس آنها همچنان این برداشت را داشت که ربات وارد مانع نشده است (شکل ۷).



شکل ۷: کاربرد نقاط حدی، مجموعه‌های باز و بسته در حرکت ربات

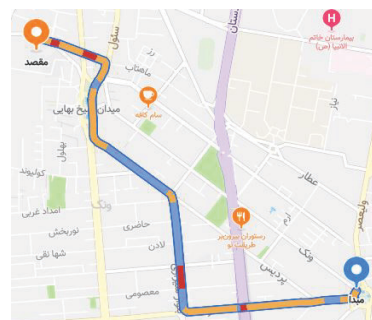
موقعیت یک جسم متحرک در بازه‌های خاصی از زمان، نوع وسیله نقلیه‌ای (پایاده، دوچرخه، تاکسی، قطار، هواپیما، ...) را که آن موجود در هر لحظه از آن استفاده می‌کند تشخیص داد. با دایره بوسان (در کنار سایر ویژگی‌ها) و استفاده از خم نمودار در بستر زمان می‌توان به جزئیات بیشتری از شیئی متحرک رسید (شکل ۸).



شکل ۸: محاسبه انحنا و کاربرد در تشخیص وسیله نقلیه

از رفتارها و محل گذرها در زمان‌های خاص می‌توان به طول مدت ماندگاری در یک محوطه پی برد و با تکرار رفتارها و مقایسه روی نقشه محیط، به پاتوق افراد پی برد و متناسب با آنها پیشنهاداتی به هر کس داد (شکل ۹).

تشخیص وسیله نقلیه: بارها از تشخیص های هوش مصنوعی متعجب شدیم و شاید هم این اقدام را کاری ساده پنداشته، از کنار پیچیدگی‌های آن به سادگی گذشته‌ایم. یک مساله دیگر که با مدل سازی ریاضی می‌توان آن را به ریاضی سپرد و با حل آن به شگفتی‌های هوش مصنوعی افزود این است که فقط با دریافت



پاتوق [۳]: اصطلاح رایجی در دنیای ربات و نیز وسائل نقلیه و شرکت‌های تاکسیرانی مانند اوبر، اسنپ، کریم و تپسی است که به آن نقاط دلخواه یا Point of Interest گفته می‌شود. من ترجیح می‌دهم در این نوشته آنها را پاتوق نام گذاری کنم. با مجموعه داده

File	Edit	Format	View	Help
4152.1419	08740.9633	10:03:26	219.973873	359.004683
4152.1433	08740.9572	10:03:27	219.979105	359.006333
4152.1431	08740.9580	10:03:28	219.978419	359.006097
4152.1437	08740.9595	10:03:29	219.977124	359.006778
4152.1445	08740.9612	10:03:30	219.975656	359.007687
4152.1453	08740.9630	10:03:31	219.974104	359.008505

شکل ۹: استفاده از داده‌های اسنپ یا ... در تشخیص پاتوق

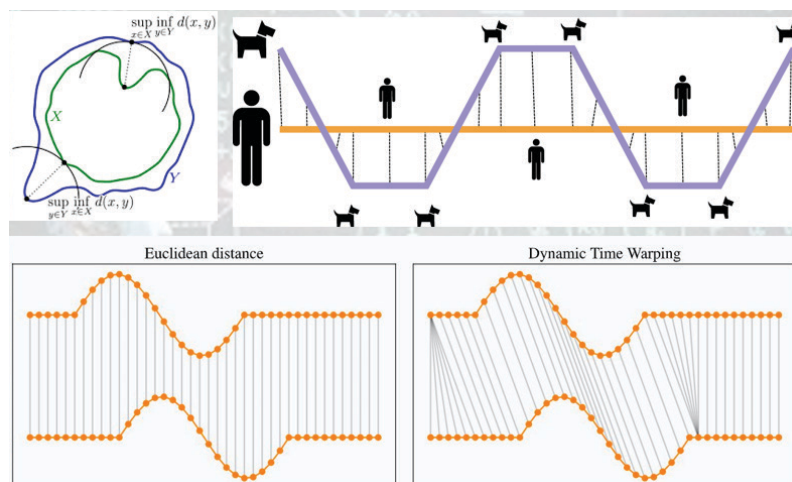
مقایسه دو امضا یا دستخط است که البته موجودیتی مانند زمان را نیز در داده‌های خود دارد و کار را سخت‌تر می‌کند. پس از انتقال این کاربرد جالب هوش مصنوعی به دنیای ریاضی و با استفاده از مفهومی به نام متریک می‌توان مساله را حل کرد و با انتقال مجدد به داخل نرم‌افزارها پیشنهادات هوشمندانه به افراد داد. علاقمندان

رفتارهای مشابه خط سیر [۴]: مشابه با مساله قبل، در کاربردهایی همچون Car Sharing (استفاده مشترک از اتومبیل توسط چند نفر به منظور صرفه جویی و ...) مساله‌ای را می‌توان با هوش مصنوعی حل کرد و پیشنهادات عالی به افراد داد که از مقایسه مسیرها به دست می‌آید (شکل ۱۰). این مقایسه‌ها شبیه

می‌توانند مترهای هاسدورف^۱، فرشه^۲، DTW^۳ و غیره (شکل ۱۱) را جستجو کرده و با نحوه کار آنها آشنا شوند.



شکل ۱۰: تشخیص مسیرهای مشابه و سیستم‌های توصیه‌گری که پیشنهادات خوب می‌دهند



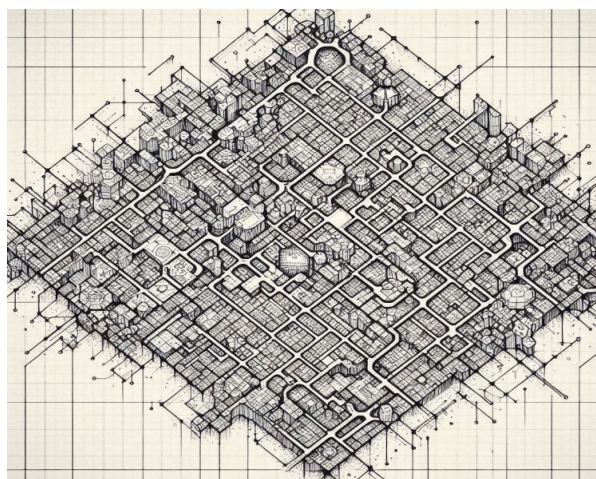
شکل ۱۱: چند نمونه متر برای اندازه‌گیری شباهت و اختلاف

این کار برای ربات گمشده (Kidnapped Robot) بسیار سخت و وقت‌گیر است، اما اگر ربات در ابتدای کار موقعیت خود را بشناسد و با کالیبره کردن موقعیت خود در بازه‌های زمانی کوتاه می‌تواند مشکل خود را حل کند. پس از انتقال مساله به دنیای ریاضی، مقایسه زنجیره‌ها و چند ضلعی‌های ساده در کمترین زمان ممکن این امکان را به ربات می‌دهد (شکل ۱۳). فراموش نکنیم که این مساله نیز پیچیدگی‌های خود را (مانند اندازه و مقیاس، چرخش شکل، موانع متحرک و مزاحم ...) را دارد اما همگی این مشکلات قابل حل هستند و علوم ریاضی و دیدگاه الگوریتمی، پس از حل مساله در هر چند ثانیه می‌تواند محل دقیق ربات را به او یادآوری کند. این گونه است که می‌توانیم در خصوص خطای داده‌ها، لغزش چرخ ربات و سایر خطاها نباشیم و جلو انباشتگی خطا در تعیین موقعیت ربات را بگیریم.

من کجا هستم [۵]: در فضای آزاد که می‌توان از GPS^۴ استفاده کرد، کار اتومبیل‌های خودران و یا ربات‌ها در خصوص موقعیت‌یابی و حتی تشخیص ژست (موقعیت و جهت) سخت نیست. اگر چه در همان حالات نیز دقت تشخیص در برخی کاربردها بسیار حساسیت دارد و استفاده از GPS تنها ابزار و کافی نیست. اما در محیط‌های بسته ربات چگونه موقعیت خود را تشخیص می‌دهد؟ او نقشه‌ای از محیط خود (مثلا یک فروشگاه بزرگ) دارد (شکل ۱۲) و به روش‌های مختلف موقعیت‌یابی می‌کند. گاهی این کار با استفاده از نشانه‌ها (Landmark) و یا از طریق تصویربرداری‌های مدام و پردازش تصویر صورت می‌گیرد. در روش‌های ساده‌تر و سریع‌تر با استفاده از سیستم‌های فاصله‌سنج ارزان و سریع، ربات می‌تواند در هر لحظه چندضلعی موانع در اطراف خود را رصد کند و با مقایسه این چند ضلعی با داخل نقشه به موقعیت خود پی ببرد.

1. Hausdorff
2. Fréchet distance

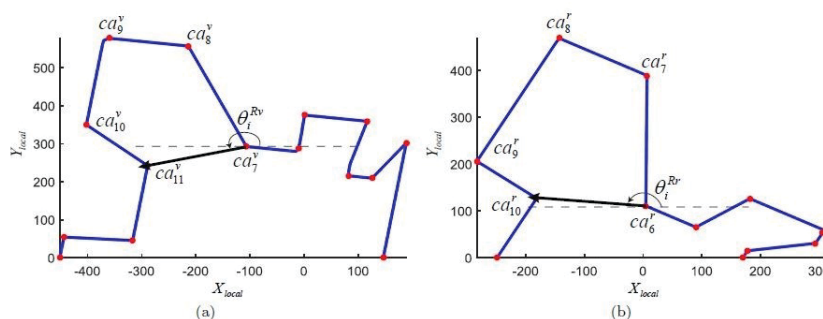
3. Dynamic time warping
4. Global Positioning System



شکل ۱۲: نقشه‌ای از محیط بسته که ربات در ذهن خود دارد

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا به رابطه بین علوم ریاضی و هوش مصنوعی پرداخته و مشخص شد که ریاضی و علوم مرتبط به آن، شالوده هوش مصنوعی است و بدون آنها نمی‌توان در مورد هسته اصلی هوش مصنوعی صحبتی کرد. سپس، از بین مباحث متنوع ریاضی، به جستجوی اصلی‌ترین ارتباط بین آنها پرداخته شد. در نهایت، مدل‌سازی ریاضی، از نظر نویسنده به‌عنوان پل ارتباطی بین اکوسیستم هوش مصنوعی و دنیای ریاضی معرفی شد. در ادامه با ارائه مثال‌هایی، به معضلات و مسائل اساسی در تبدیل این دو فضای گفتگو پرداخته شد و نمونه‌هایی از دنیای ربات و هندسه، به طور دقیق‌تر بررسی شد. در نهایت، استفاده از مدل‌سازی ریاضی برای انتقال مسائل انسانی و معنوی مانند ترس، عدالت، خشم، و... موضوعاتی بودند که نویسنده آنها را به‌عنوان مسائلی باز مطرح می‌کند.



شکل ۱۳: نمونه‌ای مساله هندسی نهایی که ربات باید هر چند ثانیه یک بار حل کند.

منابع

1. OpenAI. «Artificial Intelligence: Transforming Industries.» OpenAI, 2023, www.openai.com/ai-transforming-industries.
2. Bahram Sadeghi Bigham, *Mobile Autonomous Robots: Concepts and Algorithms*, Sharif University of Technology's Scientific Publications Institute, 2021.
3. Bakhshmand, Simin, Bahram Sadeghi Bigham, and Mahdi Bohlouli. «Predicting Points of Interest with Social Relations and Geographical-Temporal Information.» *International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2022.
4. Shamsfakhr, Farhad, and Bahram Sadeghi Bigham. «GSR: Geometrical scan registration algorithm for robust and fast robot pose estimation.» *Assembly Automation* 40.6 (2020) 801-817.
5. Sadeghi Bigham, Bahram, et al. «Optimal Robot Pose Estimation Using Scan Matching by Turning Function.» *Mathematics* 11.6 (2023): 1449.