

خمینه‌ها و کیهان

علی کمالی نژاد

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکده‌گان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران.
پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران.

Kamalinejad.a@ut.ac.ir

نامه علوم پایه شماره ۱۴، پاییز و زمستان ۱۴۰۳

چکیده

فضای اقلیدسی ۳-بعدی یکی از ساده‌ترین مثال‌ها از فضاها (خمینه‌های) ۳-بعدی است. همچنین یک مدل (البته نه تنها مدل) برای کیهان ۳-بعدی است. با وجود آن که همه خمینه‌های ۳-بعدی به صورت موضعی «شبیبه» فضای اقلیدسی ۳-بعدی هستند، اما به صورت سراسری، چنین نیستند. بنابراین لزومی ندارد که مدل ۳-بعدی کیهان، فضای اقلیدسی ۳-بعدی باشد. لذا می‌توان این پرسش را مطرح کرد که ویژگی‌های (توپولوژیکی) سراسری کیهان چگونه هستند؟ در متن حاضر نخست مقدماتی ریاضی از جمله مطالبی در مورد ۳-خمینه‌ها را مرور خواهیم کرد که به کمک آن‌ها می‌توان به صورت‌بندی دقیق‌تر از پرسش فوق رسید. سپس مقدماتی فیزیکی از جمله معادله فریدمن، قانون هابل و موضوع انبساط کیهان را به اختصار مرور خواهیم کرد که راهی به دست می‌دهند تا به صورت تجربی، پاسخ‌های احتمالی پرسش‌هایی در مورد توپولوژی و هندسه کیهان را مطالعه کنیم

پیش‌گفتار

در این متن کوتاه تلاش خواهیم کرد تا به اختصار به برخی جنبه‌های موضوع زیر بپردازیم.

ویژگی‌های توپولوژیکی سراسری کیهان و خواص هندسی موضعی آن چگونه هستند؟

پیش از پرداختن به موضوع فوق، در نظر داشته باشید که این متن کوتاه، بخشی از دانسته‌های موجود را مرور خواهد کرد. در این متن، از مدل‌های «پذیرفته شده» فیزیکی و داده‌های «قابل اتکای» موجود تا زمان نگارش، استفاده خواهد شد. همچنین تلاش خواهد شد که بدون از دست رفتن اصل موضوع، از برخی جزئیات فنی اجتناب شود.

در متن حاضر، نخست به معرفی خمینه‌ها و مطالعه مختصر ارتباط توپولوژی و هندسه خمینه‌ها در ابعاد پایین خواهیم پرداخت. پس از آن مثال‌هایی از ۳-خمینه‌ها را مرور خواهیم کرد تا با بخشی از تنوع هندسی و توپولوژیکی آن‌ها آشنا شویم. سپس به موضوع انبساط کیهان و ارتباط آن با اصل کیهان‌شناسی خواهیم پرداخت. در ادامه، ارتباط میان هندسه و توپولوژی ۳-خمینه‌ها، چگالی ماده و انرژی در کیهان و ثابت هابل را بررسی خواهیم کرد و در پایان به اختصار به برخی مسیرهای پیش رو، نگاهی خواهیم کرد.

خمینه‌ها

اگر با خمینه‌ها آشنایی دارید می‌توانید تعریف زیر را از یک n -خمینه در نظر گرفته و مستقیم به بخش بعدی بروید.

تعریف

یک خمینه توپولوژیک n -بعدی یا به اختصار یک n -خمینه، یک فضای توپولوژیک هاسدورف و شمارای دوم است که موضعاً اقلیدسی از بعد n است.

اما اگر با خمینه‌ها آشنایی ندارید، ممکن است مطالعه باقی این بخش، خالی از فایده نباشد!

خمینه‌ها تعمیم خم‌ها و رویه‌ها به ابعاد بالاتر هستند. هر خمینه با یک عدد صحیح نامنفی همراه است که بعد آن خمینه نامیده می‌شود. این عدد بعد، به بیان نه چندان دقیق، تعداد پارامترهای لازم برای مشخص کردن یک نقطه روی خمینه را به دست می‌دهد. اولین مثال یک n -خمینه، فضای اقلیدسی n -بعدی R^n است که در آن هر نقطه به معنای واقعی کلمه با یک n -تایی مرتب از اعداد حقیقی مشخص می‌شود.

یک n -خمینه، شی‌ای است که به صورت موضعی روی R^n مدل شده است. به این معنا که برای مشخص کردن یک نقطه روی آن دقیقاً به n عدد نیاز است، حداقل تا زمانی که از نقطه آغاز مشخص شده، خیلی دور نشده باشیم. به بیان یک فیزیک‌خوان یک n -خمینه شی‌ای با n درجه آزادی است.

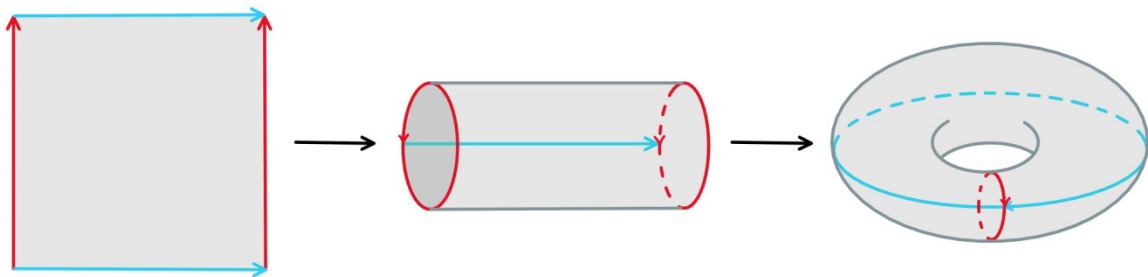
خمینه‌های با بعد ۱ همان خط‌ها و خم‌ها هستند. مثال‌هایی از ۱-خمینه‌ها عبارت‌اند از:

- خط حقیقی،
- خم‌های پیوسته داخل صفحه R^2 مانند دایره،

می‌کند و نقطه‌های نزدیک به نقطه اولیه روی خط یا خم وجود دارد.

خمینه‌ها با بعد ۲ رویه‌ها هستند. مثال‌هایی از ۲-خمینه‌ها عبارت‌اند از:

- صفحه‌های ۲-بعدی در \mathbb{R}^n ($2 \leq n$).
 - نمودار هر تابع پیوسته $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $z=f(x,y)$.
 - کره ۲-بعدی.
 - چنبره ۲-بعدی.
- در مثال‌های فوق، یک نقطه روی ۲-خمینه توسط زوجی مرتب از عددهای حقیقی مشخص می‌شود:
- یک نقطه روی صفحه ۲-بعدی با زوج مرتبی مانند (x,y) از عددهای حقیقی مشخص می‌شود (پس از انتخاب یک پایه، تناظری دوسویی بین نقاط صفحه و زوج‌های مرتب از عددهای حقیقی برقرار می‌شود).
 - یک نقطه روی نمودار f با مختص (x,y) آن مشخص می‌شود.
 - یک نقطه روی کره ۲-بعدی با طول و عرض جغرافیایی‌اش مشخص می‌شود.
 - یک نقطه روی چنبره ۲-بعدی با دو زاویه مشخص می‌شود.



شکل ۱. چنبره ۲-بعدی

ویژگی مشترک همه مثال‌های فوق این است که یک n -خمینه به صورت موضعی شبیه فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n است. هر چند می‌توان به صورت سراسری کاملاً متفاوت باشد. برای آن که شبیه بودن به \mathbb{R}^n را کمی دقیق‌تر کنیم، نخست به شبیه بودن بازهای در \mathbb{R}^n می‌پردازیم. فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^n$ و $V \subset \mathbb{R}^n$. نگاشت $\phi: U \rightarrow V$ را یک همسان‌ریختی می‌نامیم هرگاه تناظری دوسویی (یک به یک و پوشا) باشد، همچنین ϕ و $1-\phi$ پیوسته باشند. $M \subset \mathbb{R}^k$ را موضعا اقلیدسی از بعد n می‌نامیم، هرگاه هر نقطه M همسایگی در M داشته باشد که همسان‌ریخت یک گوی در \mathbb{R}^n باشد.

ارتباط میان توپولوژی و هندسه خمینه‌ها

هرچند خاصیت‌های هندسی مانند فاصله بین نقاط یا خمیدگی فضا تحت همسان‌ریختی‌ها (ناوردهای توپولوژیک) ناوردا نمی‌مانند، اما میان توپولوژی خمینه‌های بسته (فشرده و بدون مرز) با بعد پایین (۲ و ۳) و هندسه آن‌ها ارتباطی برقرار است. نخست و به دلیل سادگی بیشتر، رویه‌های ۲-خمینه‌های بسته جهت‌پذیر و همبند

• نمودار هر تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$.

• خم‌های فضایی (خم‌های پیوسته داخل \mathbb{R}^3) که معمولاً به صورت پارامتری $(\alpha(t)=(f(t),g(t),h(t)))$ برای تابع‌های پیوسته f, g و h توصیف می‌شوند.

در همه مثال‌های فوق، یک نقطه روی ۱-خمینه با عددی حقیقی مشخص می‌شود:

- یک نقطه روی خط حقیقی، با یک عدد حقیقی مشخص می‌شود.
- یک نقطه روی دایره، با زاویه آن نقطه مشخص می‌شود.
- یک نقطه روی نمودار f ، با مختص x آن مشخص می‌شود.
- یک نقطه روی یک خم پارامتری در \mathbb{R}^3 با پارامتر t مشخص می‌شود.

در نظر داشته باشید که اگرچه مقدار یک پارامتر، یک نقطه را تعیین می‌کند، اما مقدارهای متفاوت آن پارامتر می‌توانند یک تک نقطه را مشخص کنند، مانند زاویه‌های روی دایره. بنابراین این تناظر، دوسویی (به خصوص یک به یک)، نیست. اما در همه موارد، تا زمانی که به نقطه اولیه نزدیک باشیم، تناظری یک به یک بین اعداد حقیقی نزدیک به عدد حقیقی که نقطه اولیه را مشخص

مثالی غیر بدیهی در بعدهای بالاتر کره واحد n -بعدی S^n است.

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

یک نقطه روی S^n را می‌توان با یک n -تایی مرتب از اعداد حقیقی مشخص کرد. به عنوان مثال اگر در نزدیکی $(x_{n+1} > 0)$ قطب شمال $(0, 1, \dots, 0, 0)$ باشیم، آنگاه

$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

بنابراین n -تایی (x_n, \dots, x_2, x_1) با $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 1$ ، نقطه‌ای روی S^n را مشخص می‌کند. با وجود آن که اگر از نزدیکی قطب شمال دور شویم این مشاهده دیگر دقیقاً به همین صورت برقرار نخواهد بود، اما برای هر نقطه‌ای روی S^n مشاهده مشابهی، با معادلاتی مشابه برقرار خواهد بود.

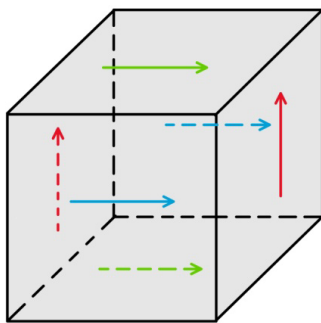
فضای هذلولوی ۳-بعدی H^3 . مجموعه $\{x, y, z \in \mathbb{R}^3: 0 < z\}$ که به متریک $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$ مجهز شده است، مدلی برای فضای هذلولوی ۳-بعدی است. هندسه H^3 هذلولوی است.

چنبره ۳-بعدی T^3 . مکعب ۳-بعدی توپر را در نظر بگیرید و وجه‌های آن را به صورت زیر با هم یکی کنید. حاصل T^3 است. همچنین T^3 از نظر توپولوژیکی $S^1 \times S^1 \times S^1$ است. هندسه T^3 تخت است.

فضای تصویری (حقیقی) ۳-بعدی P^3 . روی $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ رابطه هم‌ارزی $x \sim \lambda x$ را برای هر λ حقیقی ناصفر در نظر بگیرید. در این صورت $P^3 = \mathbb{R}^4 - \{0\} / \sim$ همسان‌ریخت (همچنین هموارریخت) گروه $SO(3)$ (گروه همه دوران‌های \mathbb{R}^3 حول مبدأ) است. هندسه P^3 کروی است.

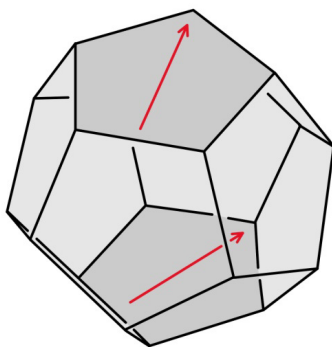
$E^1 \times T^2$. فرض کنید T^2 چنبره ۲-بعدی باشد. در این صورت ۳-خمینه $E^1 \times T^2$ یک ۳-خمینه باز است. هندسه $E^1 \times T^1$ تخت است.

$E^2 \times S^1$. هندسه $E^1 \times S^1$ تخت است.



شکل ۲. چنبره ۳-بعدی T^3

فضای ۱۲-وجهی پوانکاره. یک ۱۲-وجهی منتظم توپر را در نظر بگیرید. هر وجه این ۱۲-وجهی را پس از یک چرخش به اندازه $\frac{1}{12}$ یک دور کامل در جهت عقربه‌های ساعت، با وجه مقابل آن یکی کنید. فضای حاصل یک ۳-خمینه بسته است. هندسه فضای ۱۲-وجهی پوانکاره کروی است.



شکل ۳. فضای ۱۲-وجهی پوانکاره

را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه طبقه‌بندی رویه‌ها، این خمینه‌ها با گوناوی‌شان (شاخص اوپلرشان) طبقه‌بندی می‌شوند. در این حالت (رویه‌های بسته جهت‌پذیر و همبند) توپولوژی (شاخص اوپلر) و هندسه (انتگرال خمیدگی گاوسی)، ارتباط روشنی دارند. به عبارت دقیق‌تر و با توجه به قضیه گاس-بونه داریم:

$$\int_S K \, dA = 2\pi \chi(S)$$

که در آن S رویه مورد نظر، K خمیدگی گاوسی، dA عنصر سطح و $\chi(S)$ شاخص اوپلر S است. با وجود آنکه به صورت موضعی می‌توان با اثر دادن یک همسان‌ریختی، هندسه را تغییر داد، اما این قضیه نشان می‌دهد که به صورت سراسری، هندسه و توپولوژی S به یکدیگر مربوط هستند.

به این ترتیب وجود هندسه کروی (خمیدگی ثابت $0 < K$) روی کره، هندسه تخت روی چنبره (خمیدگی ثابت $0 = K$) و هندسه هذلولوی (خمیدگی ثابت $0 > K$) روی رویه‌های با گوناوی ≥ 2 با قضیه گاس-بونه سازگار به نظر می‌رسد.

اما قضیه یکنواخت‌سازی تضمین می‌کند که چنین هندسه‌هایی به واقع روی این رویه‌ها موجودند. به این ترتیب هندسه ذاتی کره، چنبره، و رویه‌های با گوناوی ≥ 2 به ترتیب کروی، تخت و هذلولوی است.

نظریه مشابهی (هرچند با پیچیدگی بیشتر) در مورد ۳-خمینه‌های بسته و همبند وجود دارد که بخشی از آن در غالب قضیه هندسی‌سازی پرلمن-ترسن صورت‌بندی می‌شود. به این ترتیب، میان توپولوژی ۳-خمینه‌های بسته و همبند و هندسه ذاتی آنها (در این خانواده از خمینه‌ها و به صورت مشخص‌تر، پس از تجزیه JSJ ۳-خمینه‌های اول بسته جهت‌پذیر و در نظر گرفتن هندسه بخش‌های حاصل) ارتباطی جدی برقرار است. به جای پرداختن به جزئیات فنی توپولوژی خمینه‌های ۳-بعدی و قضیه هندسی‌سازی ۳-خمینه‌ها که از حوصله این متن خارج است، در بخش بعدی تلاش خواهیم کرد تا با ذکر مثال‌هایی از ۳-خمینه‌ها، بخشی از تنوع توپولوژیک آنها را مرور کنیم.

مثال‌هایی از ۳-خمینه‌ها

فضای اقلیدسی ۳-بعدی E^3 . آشناترین مثال خمینه ۳-بعدی، R^3 است که به متریک اقلیدسی مجهز شده است. برای R^3 و R^3 مجهز به متریک اقلیدسی، دومی را با نماد E^3 نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب فضای اقلیدسی n -بعدی را با E^n نمایش می‌دهیم. هندسه E^3 (همچنین همه E^n ها) تخت است.

کره ۳-بعدی S^3 . به صورت توپولوژیک می‌توان S^3 را به صورت دو گوی توپر ۳-بعدی در نظر گرفت که از طریق کره‌های ۲-بعدی مرزی به یکدیگر چسبانده شده‌اند. هندسه S^3 کروی است.

که مدار زمین از خورشید دورتر می‌شود. حتی به این معنا نیست که ستارگان درون کهکشان ما با گذشت زمان از هم دورتر می‌شوند. اما به این معناست که کهکشان‌های دور از هم دورتر می‌شوند. اما تفاوت در مثال‌های فوق در چیست؟ تفاوت در چگالی ماده و اثر گرانش است. اتم‌های بدن با گذشت زمان از یکدیگر دور نمی‌شوند؛ جدایی آنها توسط قدرت پیوندهای شیمیایی تعیین می‌شود و گرانش نقش مهمی ایفا نمی‌کند. بنابراین ساختارهای مولکولی تحت تأثیر انبساط قرار نخواهند گرفت. به همین ترتیب، حرکت زمین در مدار خود کاملاً تحت سلطه جاذبه گرانشی خورشید است (با سهم جزئی از سایر سیارات). و حتی ستارگان در کهکشان ما در چاه پتانسیل گرانشی مشترکی که خودشان ایجاد می‌کنند، در حال چرخش هستند و نسبت به یکدیگر از هم دور نمی‌شوند. ویژگی مشترک این محیط‌ها این است که چگالی زیادی (بیش از حد معینی) دارند، که با توزیع هموار ماده (که با تسامح از فرض‌هایی است که مدل‌های کیهان‌شناسی بر آن اساس به دست می‌آیند)، بسیار متفاوت است. اما اگر به مقیاس‌های به اندازه کافی بزرگ، در عمل ده‌ها مگاپارسک، برویم، کیهان عملاً همگن و ایزوتروپیک می‌شود و کهکشان‌ها از یکدیگر دور می‌شوند. در کیهان‌شناسی و بر اساس یافته‌های تجربی [۴ و ۵] اعتقاد بر این است که کیهان در مقیاس بزرگ دارای دو ویژگی مهم است: همگن و ایزوتروپیک است. همگنی به این معنی است که کیهان در هر نقطه یکسان به نظر می‌رسد، در حالی که ایزوتروپی بیان می‌کند که کیهان در همه جهات یکسان به نظر می‌رسد. در این مقیاس‌های بزرگ (ده‌ها مگاپارسک) است که انبساط کیهان احساس می‌شود و اصل کیهان‌شناسی (کیهان همگن و ایزوتروپیک است). در مورد آن اعمال می‌شود.

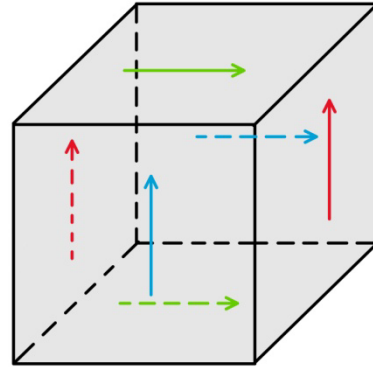
کیهان و ۳-خمینه‌ها

اصل کیهان‌شناسی در کنار معادله‌های نسبیت عام به معادله فریدمن [۱ و ۲] منجر می‌شود. (البته جالب است که از نظریه گرانشی نیوتون نیز می‌توان معادله فریدمن را به دست آورد.) صورت متعارف معادله فریدمن عبارت است از

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

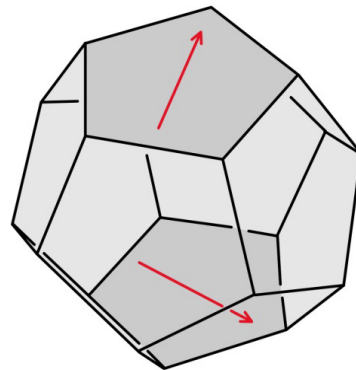
که در آن، $a=a(t)$ یک تابع اسکالر است که تنها به زمان بستگی دارد و معمولاً عامل اسکالر کیهان نامیده می‌شود، G ثابت گرانش، ρ چگالی ماده، k خمیدگی کیهان و c سرعت نور است. معادله فوق بر اساس فرض‌های همگنی و ایزوتروپی به دست می‌آید. برای آن که ماهیت a کمی بیشتر روشن شود فرض کنید که در کیهان فاصله ویژه را با \vec{r} و فاصله همراه را با \vec{x} نمایش دهیم، آنگاه رابطه بین این دو برقرار است. ویژگی همگنی تضمین می‌کند که a تنها تابعی از زمان است. در کیهان‌شناسی معمول است که چگالی

فضای $\frac{1}{4}$ -چرخش. مکعب ۳-بعدی توپر را در نظر بگیرید و وجه‌های آن را به صورت زیر با هم یکی کنید. حاصل فضای $\frac{1}{4}$ -چرخش است. هندسه فضای $\frac{1}{4}$ -چرخش تخت است.



شکل ۴. فضای $\frac{1}{4}$ -چرخش

فضای سایفرت-وبر. یک ۱۲-وجهی منتظم توپر را در نظر بگیرید. هر وجه این ۱۲-وجهی را پس از یک چرخش به اندازه $\frac{\pi}{3}$ یک دوران کامل در جهت عقربه‌های ساعت، با وجه مقابل آن یکی کنید. فضای حاصل یک ۳-خمینه بسته است. هندسه فضای سایفرت-وبر هذلولوی است.



شکل ۵. فضای سایفرت-وبر

انبساط کیهان

یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که کهکشان‌ها در حال دور شدن از یکدیگر هستند. این دور شدن به دلیل حرکت کهکشان‌ها نسبت به هم نیست! بلکه این دور شدن نتیجه انبساط کل کیهان است. با توجه به داده‌ها، کیهان با نرخ ۷ درصد در هر یک میلیارد سال در حال انبساط است. به عبارت دیگر اگر کیهان به انبساط خود با نرخ کنونی ادامه دهد، پس از یک میلیارد سال، همه فاصله‌های میان کهکشانی به اندازه ۷ درصد کشیده می‌شوند. این نرخ به ثابت هابل شهرت دارد.

اما انبساط کیهان به چه معناست؟ بیایید با آنچه که به آن معنا نیست شروع کنیم. انبساط کیهان به آن معنا نیست که بدن شما به تدریج با گذشت زمان بزرگتر می‌شود و همچنین به آن معنا نیست

توسط نامساوی زیر داده می‌شود.

$$\rho > \frac{3}{8\pi G} H^2$$

که در آن، همان گونه که پیش‌تر توضیح داده شد، H ثابت هابل و G ثابتی است که در قانون گرانش نیوتون

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

ظاهر می‌شود. S^3 ، P^3 و فضای ۱۲-وجهی پوانکاره مثال‌هایی از ۳-خمینه‌هایی با هندسهٔ کروی هستند. در کیهانی با هندسهٔ هذلولوی میانگین چگالی ماده و انرژی ρ باید کمتر از مقدار بحرانی باشد.

$$\rho < \frac{3}{8\pi G} H^2$$

فضای سایفرت-وبر، H^3 و اکثر ۳-خمینه‌های بسته (با توجه به قضیهٔ هذلولوی‌سازی ترسن و قضیهٔ هندسی‌سازی پرلمن-ترستن) مثال‌هایی از ۳-خمینه‌هایی با هندسهٔ هذلولوی هستند. در کیهان تخت، ρ باید برابر مقدار بحرانی باشد.

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2$$

E^3 ، فضای $\frac{1}{4}$ -چرخش، $E^1 \times T^2$ ، $E^1 \times E^2$ و T^3 مثال‌هایی از ۳-خمینه‌های با هندسه تخت هستند. از آنجا که چگالی و ثابت هابل به صورت تجربی قابل اندازه‌گیری هستند، لذا می‌توان خمیدگی کیهان را بر اساس یافته‌های تجربی مطالعه کرد. همچنین هندسهٔ کیهان (با توجه به هندسی‌سازی) با توپولوژی آن در ارتباط است. اندازه‌گیری‌های پیشین (تا نزدیک به اواخر قرن بیستم) نشان می‌دادند که چگالی ماده در حدود ۳۰ درصد مقدار بحرانی است که نتیجه می‌داد کیهان هذلولوی است. در سال ۱۹۹۸ محاسبه‌ها و اندازه‌گیری‌های جدیدتر نشان دادند [۳] که کیهان قابل رویت، هذلولوی نبوده، بلکه تخت (به تقریبی) است. این موضوع با فرمول فوق تناقضی ندارد! زیرا اندازه‌گیری‌های جدیدتر که در آن «انرژی خالص» نیز وارد شده است (توجه کنید که ρ چگالی ماده و انرژی است)، نشان می‌دهند که با احتساب انرژی خالص، ρ تقریباً برابر مقدار بحرانی است که تخت بودن (تقریبی) هندسهٔ کیهان را نتیجه می‌دهد.

هر چند این نتایج و اندازه‌گیری‌ها نسبتاً اخیر هستند اما مطالعه‌ها و اندازه‌گیری‌ها همچنان ادامه دارند و ممکن است نتایج جدیدی در قرن بیست و یکم، مدل‌ها و درک ما از کیهان را دگرگون کنند

گفتار پایانی

در ادامهٔ مسیری که در بخش‌های قبلی مرور شد، همچنان کارهای

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}$$

ماده ρ و چگالی انرژی e را به صورت قابل تبدیل به یکدیگر در نظر گیرند. این دو به کمک معادلهٔ معروف انیشتین $e = \rho c^2$ به یکدیگر قابل تبدیل هستند و اگر ثابت c را یک (یکای طبیعی) در نظر بگیریم (که در معادله‌های کیهان‌شناسی غیرمعمول نیست)، آنگاه ρ و e برابر می‌شوند. اگر چنین کنیم معادلهٔ فریدمن به معادلهٔ

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

تبدیل می‌شود که در آن چگالی ماده و انرژی است. معادلهٔ فریدمن اجازه می‌دهد که قانون هابل مبنی بر این که سرعت دور شدن کهکشان‌ها متناسب با فاصله آنهاست را توضیح دهیم. سرعت دور شدن $v = dr/dt$ در جهت r است و داریم:

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$$

با توجه به قانون هابل داریم:

$$\vec{v} = H\vec{r}$$

بنابراین

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

با توجه به معادلهٔ فریدمن داریم:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

در نظر داشته باشید که کروی، هذلولوی یا تخت بودن کیهان، به ترتیب، معادل مثبت، منفی یا صفر شدن k است و با توجه به معادلهٔ فوق، مثبت، منفی یا صفر شدن k معادل بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا برابر شدن ρ با

$$\frac{3}{8\pi G} H^2$$

است.

همچنین عبارت ثابت هابل کمی گمراه‌کننده است. اگرچه به دلیل اصل کیهان‌شناسی $H = H(t)$ در فضا ثابت است، اما دلیلی وجود ندارد که در زمان نیز ثابت باشد.

با توجه به مطالب فوق، حال به اختصار می‌توان به پاسخ این پرسش پرداخت که کیهان چه توپولوژی دارد؟ پاسخ خلاصه چنین است: زمانی که نظریهٔ نسبیت عام را به کیهان در حال انبساط اعمال کنیم به رابطه‌ای میان چگالی ماده و انرژی، نرخ انبساط و خمیدگی کیهان دست می‌یابیم. در کیهان با هندسهٔ کروی میانگین چگالی ماده و انرژی ρ ، باید بیشتر از مقداری بحرانی باشد که

را پیشنهاد می‌دهند. روشن است که ثابت هابل، نقشی اساسی در مطالعه هندسه و توپولوژی کیهان ایفا می‌کند. در پایان، اگر نظریه‌های ریاضی و فیزیکی، همچنین روش‌های اندازه‌گیری به حدی پیشرفت کنند که مدلی بسیار رضایت‌بخش از هندسه و توپولوژی کیهان و همچنین انبساط آن ارائه دهند که خمیدگی کیهان را با دقت و اطمینان بالایی به دست دهد (که در حال حاضر چنین نیست). همچنان پرسش‌های بی‌پاسخی باقی می‌ماند. به عنوان مثال، یکی از این پرسش‌ها می‌تواند چنین باشد: فرض کنید بپذیریم که کیهان تخت است. اما در این صورت با کدام 3 -خمینه تخت مواجه هستیم؟ زیرا فضای اقلیدوسی 3 -بعدی تنها $E^2 \times S^1$ و T^3 همگی 3 -خمینه‌هایی با هندسه تخت هستند که همسان‌ریخت E^3 نیستند. بنابراین حتی پس از یافتن خمیدگی کیهان، با پرسشی بی‌پاسخی مواجه هستیم. خوشبختانه همچنان راه‌هایی مبتنی بر مدل‌های ریاضی-فیزیکی و اندازه‌گیری، برای یافتن پاسخ وجود دارد. احتمالاً تلاش برای یافتن پاسخ چنین پرسش‌هایی بخشی از فعالیت‌های ریاضی و کیهان‌شناسی قرن بیست و یکم خواهند بود.

زیادی باقی مانده است. در قسمت نظریه ریاضی با وجود آن که برهان پرلن برای حدس هندسی‌سازی ترستن مسئله طبقه‌بندی خمینه‌های 3 -بعدی را به سرانجام می‌رساند اما پاسخ‌گوی همه پرسش‌ها در مورد توپولوژی خمینه‌های 3 -بعدی نیست. بنابراین پژوهش‌ها برای درک بهتر و روشن‌تر توپولوژی 3 -خمینه‌ها کاملاً به پایان نرسیده و همچنان در جریان است. در قسمت نظریه فیزیکی نیز با وجود آنکه معادله فریدمن که بخشی از استدلال‌های بخش‌های قبل بر اساس آن صورت گرفت، معادله‌ای پذیرفته شده است، اما نحوه معنا دادن به چگالی ماده و انرژی و وارد کردن و یا نکردن انرژی خالص به آن بسیار سرنوشت ساز است. در حال حاضر، اصطلاح «انرژی خالص» پرچسی است برای اشاره به مفهومی که در مورد آن چیز زیادی نمی‌دانیم. اما این مفهوم با توسعه درک ما از کیهان مرتبط به نظر می‌رسد. در قسمت اندازه‌گیری‌های تجربی نیز همچنان فعالیت‌ها ادامه دارند. به عنوان مثال، برآورد دقیق ثابت هابل به دلیل در دست نبودن دقیق فاصله کهکشان‌ها از یکدیگر، تاکنون امکان‌پذیر نبوده است. هرچند برای سادگی، در این متن، آن را 7 درصد در هر یک میلیارد سال در نظر گرفتیم اما یافته‌های تجربی متفاوت [۶ و ۷ و ۸]، عددی بین 5 تا 8 درصد

منابع

1. Friedman, A (1922). «Über die Krümmung des Raumes». *Z. Phys.* (in German). 10(1), 377-386. (English translation: Friedman, A (1999). «On the Curvature of Space». *General Relativity and Gravitation*, 31(12), 1991-2000.
2. Friedmann, A (1924). «Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes». *Z. Phys.* (in German). 21(1), 326-332. (English translation: Friedmann, A (1999). «On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space». *General Relativity and Gravitation*. 31(12), 2001-2008.
3. Garnavich, P. M., Jha, S., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Filippenko, A. V., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Phillips, M. M., Reiss, D., Riess, A. G., Schmidt, B. P., Schumner, R. A., Chris Smith, R., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N. B., ... Carroll, S. M. (1998). Supernova limits on the cosmic equation of state. *Astrophysical Journal*, 509(1PART I), 74-79.
4. Hu, Wayne; Dodelson, Scott (September 2002). «Cosmic Microwave Background Anisotropies». *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 40(1), 171-216.
5. The Planck Collaboration (2020), «Planck 2018 results V. CMB power spectra and likelihoods», *Astronomy and Astrophysics*, 641:A5.
6. di Valentino, Eleonora; et al. (2021). «In the realm of the Hubble tension—a review of solutions». *Classical and Quantum Gravity*. 38(15), 153001.
7. Riess, Adam G.; Anand, Gagandeep S.; Yuan, Wenlong; Casertano, Stefano; Dolphin, Andrew; Macri, Lucas M.; Breuval, Louise; Scolnic, Dan; Perrin, Marshall; Anderson, Richard I. (2023-10-01). «Crowded No More: The Accuracy of the Hubble Constant Tested with High-resolution Observations of Cepheids by JWST». *The Astrophysical Journal Letters*. 956(1):L18.
8. Verde, Licia; Schöneberg, Nils; Gil-Marín, Héctor (2024-09-13). «A Tale of Many H_0 ». *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 62, 287-331.