تقریبات آشکوبه‌ای

مهدی رجبعلی‌پور[1] و پویا کریمی[2]
۱. فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران، تهران، ایران؛ و گروه پژوهشی فناوری و ریاضیات کاربردی پردیس، کرمان، ایران
۲. بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران؛
و گروه پژوهشی آموزش ریاضی، پژوهشکده ریاضی ماهانی، پژوهشگاه افضلی پور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
radjabalipour@ias.ac.ir
نامه علوم پایه شماره ۱۴، پاییز و زمستان ۱۴۰۳

چکیده

تقریبات مرحله‌به‌مرحله ای که در این مقاله با عنوان «تقریبات آشکوبه‌ای» معرفی می‌شوند، گونه‌ای از روش‌های علمی‌اند که در آنها هر مرحله جدید، بدون حذف یا تغییر اطلاعات مراحل پیشین، صرفاً با افزودن جزئیات بیشتر، بر دقت تقریب می‌افزاید. نمونه‌های متعددی از این ساختار در تاریخ علم و ریاضیات به چشم می‌خورد: از بسط‌های دودویی، شصت‌شصتی و ده‌دهی کسرها در تمدن‌های باستان، تا اصلاح مسیر سیارات با مدل‌های فلک‌برفلک در نجوم بطلمیوسی، و از بسط‌های تیلور و مک‌لوران در تقریب پیچ‌وتاب موضعی خم‌ها و رویه‌ها، تا تحلیل فوریه و پردازش چندریزه‌سازی موج‌ها در علوم معاصر. هر یک از این روش‌ها بر پایه ساختاری طبقه‌مند و افزایشی بنا شده‌اند که بدون بازنویسی تقریبات قبلی، تنها با افزودن لایه‌های جدید، به هدف نهایی نزدیک‌تر می‌شوند. در اینجا با رویکردی تاریخی و تحلیلی، مسیر تحول این نگرش آشکوبه‌ای را در ریاضیات، نجوم و پردازش سیگنال بررسی شده و نشان می‌دهیم که چگونه این منطق مرحله‌ای، از دل مشاهدات تجربی باستانی تا مدل‌سازی‌های دقیق امروزی در نظریه موجک‌ها و پردازش پیام، گسترش یافته است. در نهایت، حتی مفاهیم به‌ظاهر ساده‌ای چون تقریب نیز می‌توانند از بنیان‌های تاریخی، فلسفی و فناورانه‌ای ژرف برخوردار باشند و همچنان الهام‌بخش تأملات علمی نوین قرار گیرند.

کلیدواژگان: تقریب آشکوبه‌ای، بسط سری‌های ریاضی، کسرهای دودویی، موجک‌ها، تاریخ ریاضیات

مقدمه

شبح تجزیه متوالی یک تابع دلخواه به تابع‌های ساده‌تر، در کارهای منجمان قدیم بابلی و یونانی مشاهده شده و البته نظیر آن در مورد اعداد حقیقی مثبت نیز پیشینه‌ای بس طولانی‌تر داشته است. تجزیه کسرها به کسرهای دودوئی توسط مصریان، شصت‌شصتی توسط سومری‌ها و دهدهی توسط هندی‌ها از زمان‌های دور انجام می‌شده است [۱]. در فرضیه زمین‌مرکزی نیز یونانیان مسیر سیاره را نخست دایره‌ای به مرکز زمین یا نزدیک زمین گرفته و به مرور که متوجه انحراف سیاره از مسیر تخمینی می‌شدند، یک دایره هم بر آن دایره سوار می‌کردند تا انحراف‌های جزئی توجیه شود. دانشمندان غرب و شرق تا سقوط فرضیه زمین‌مرکزی، این کار دایره‌بردایره نهادن را به امید یافتن مسیر دقیق تا قرن‌ها ادامه دادند. در مورد تشبیه پیچ و تاب‌های موضعی یک منحنی نیز، ریاضی‌دانان قرن هیجدهم اروپا نخست منحنی را با مقدار آن، سپس با مقدار مشتق آن و همینطور مشتقات بعدی آن مشخص می‌کردند که مبحث سری‌های تیلور و مک‌لورن[1] را به وجود آوردند. قرن نوزدهم با سری‌های فوریه[2] شروع شد که وضع کلی تابع را بررسی می‌کرد و در هر مرحله با وارد کردن سینوس‌ها و کسینوس‌های با فرکانس بیشتر، به شکل واقعی تابع نزدیک‌تر می‌شد. در تمام مثال‌هائی که برشمردیم، عمل تقریب از روندی آشکوبه‌ای (طبقاتی) برخوردار است: از یک طبقه پایه شروع می‌شود و با اضافه شدن هر طبقه، جزئیات بیشتر تقریب آشکار می‌گردد. مثلا در تقریبات دهدهی، معمولا جزء صحیح عدد را پایه تقریب می‌گیرند و رقم اول بعد از ممیز آشکوبه بعدی است و ...؛ در نظام فلکی، همان فلک اول را پایه می‌گیرند و فلک بعدی روی فلک اول سوار می‌شود و ...؛ در بسط تیلور مقدار موضعی تابع را پایه می‌گیرند و مشتق اول را مشخصه بعدی و ...؛ در سری فوریه مقدار متوسط تابع را پایه می‌گیرند و در طبقه بعدی میزان سینوس و طبقه بعدی میزان کسینوس موجود در تابع (موج) را تعیین می‌کنند؛ و سایر مثال‌ها هم به همین ترتیب. گرچه محاسبه انتگرال لبگ[3] هم طبیعت آشکوبه‌ای دارد ولی چون نتیجه هر مرحله یک عدد خواهد بود کلیه اطلاعات مرحله‌ای در همان عدد خلاصه می‌شود و ساختاری برجا نمی‌ماند. در بخش‌های بعدی مثال‌هائی را که یادآور شدیم با جزئیات بیشتری مطالعه می‌کنیم.

---

1. Taylor & Maclaurin series
2. Fourier series
3. Lebesgue integral

فرهنگ واژگان

تقریب آشکوبه‌ای: فرایندی همانند تقریب دهدهی یک کمیت که مرحله به مرحله انجام می‌شود و هرجا متوقف شویم، جواب نهائی کلیه جواب‌های مرحله‌های قبل را نمایش می‌دهد.

فلک گردش سیاره: در فرضیه زمین مرکزی (یعنی فرض گردش جهان به دور زمین)، نخست تصور می‌شد خورشید و هر یک از سیارات دیگر بر دایره‌ای به نام فلک اول آن سیاره در گردش است. با افزایش دقت رصدها متوجه شدند که سیاره از محیط فلک اول دور و نزدیک می‌شود و لذا فرض شد که سیاره بر فلک دومی می‌چرخد که مرکزش روی فلک اول می‌لغزد و به همین ترتیب فلک‌های سوم و چهارم و غیره را تعریف می‌کردند.

سری عددی: مجموع صوری بینهایت عدد که ممکن است مانند سری $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ بی‌معنی یا واگرا باشد و یا مثل سری $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ با معنا یا همگرا باشد:

سری تابعی: همانند سری عددی است، جز این که در آن به جای «عدد»، «تابع عدد مقدار» بگذارند.

بسط تابع: نوشتن یک تابع به صورت یک سری تابعی همگرا (معنادار). برحسب شرایط تابع، بسطهای گوناگونی مانند «بسط تیلور»، «بسط مک لورن»، «بسط فوریه»، یا غیره را می‌توان برایش نوشت. در سری‌های تیلور یا مک‌لورن، جمله nام آن به صورت $a_n(x-a)^n$ و در سری فوریه به صورت $a_n\sin n(x-a) + b_n\sin n(x-a)$ است.

انتگرال ریمان: تابع نامنفی و کراندار f را با دامنه تعریف $[a,b]$ در نظر بگیرید. هر شکل حاصل از اجتماع تعدادی متناهی از مستطیل‌های تباهیده یا ناتباهیده را در نظر بگیرید که قاعده‌های پائین شان دامنه را بپوشانند و قاعده‌های بالایشان بالای (متناظراً پائین) منحنی نمایش f باشند؛ مساحت شکل حاصل را یک زبرجمع (متناظرا یک زیرجمع) ریمانی تابع f بنامید. بدیهی است که هر زبرجمع ریمانی بزرگتر از یا مساوی با هر زیرجمع ریمانی است و در نتیجه دست کم یک عدد I وجود دارد که کوچکتر از یا مساوی با همه زبرجمع‌ها و بزرگتر از یا مساوی با همه زیرجمع‌ها باشد. اگر این عدد یکتا باشد، آن را انتگرال ریمانی تابع f نامند و گویند تابع مزبور ریمان انتگرال پذیر است.

اندازه لبگ: در فضای یک بعدی، طول هر بازه بسته، باز یا نیم‌باز، تباهیده یا ناتباهیده از a تا b برابر با $b-a$ است؛ حال اگر اجتماعی از چند پاره خط جدا از هم داشته باشیم، مجموع طول‌هایشان را اندازه لبگ آن اجتماع می‌نامیم. با استفاده از سری‌های عددی، می‌شود اندازه لبگ را برای هر تعداد شماره از بازه‌ها تعمیم داد. اندازه لبگ هر تعداد شمارای نقطه هم صفر است و اگر به مجموعه‌ای تعداد شمارائی نقطه کم یا اضافه کنیم تاثیری در اندازه لبگ آن نمی‌کند. (بنابراین، اندازه لبگ مجموعه عددهای گویا صفر است.) نظریه اندازه لبگ کلاس همه مجموعه‌هائی را بررسی می‌کند که به طور معقولی بتوان اندازه لبگ را برایشان تعریف کرد ولو آن که $+\infty$ باشد.

انتگرال لبگ: به عنوان مثال، تابع مشخصه مجموعه کلیه عددهای گویای واقع در بازه $[۰,۱]$ را f بنامید. این تابع از بالا به تابع ثابت $g(x)=1$ و از پائین به تابع ثابت $g(x)=0$ مماس است. انتگرال ریمان g مساوی ۱ و انتگرال ریمان h مساوی 0 و در نتیجه

(زبرجمع ریمانی f) $\leq ۱ > 0 \leq$ (زیرجمع ریمانی f);

بنابراین تابع f ریمان انتگرال پذیر نیست. اما سایه عمودی f روی $[۰,۱]$ اندازه‌اش برابر ۰ است، پس طبیعتاً (مساحت زیر f) = (قاعده×ارتفاع) = ۱ × ۰ = ۰. این مساحت را انتگرال لبگ تابع f نامند و همانند انتگرال پذیری ریمان به تابع‌های نامنفی تعمیم داده می‌شود. نظریه انتگرال لبگ کلاس همه تابع‌هائی را بررسی می‌کند که به طور معقولی بتوان انتگرال لبگ را برایشان تعریف کرد.

موجک: در آنالیز همساز، با استفاده از سری‌های فوریه (و گاهی نیز تبدیل‌های فوریه) یک موج دلخواه را با امواج ساده سینوسی و کسینوسی تقریب زده و در موارد مختلفی از قبیل مخابره صوت، یا ضبط اثر انگشت و غیره استفاده می‌کنند. این تقریبات برای موجهائی که ناگهان شدید شده و سپس میرا می‌شوند نامناسب و پرهزینه هستند و لذا سینوس و کسینوس را با تابع‌های مناسب‌تری به نام موجک عوض می‌کنند

آنالیز چند ریزه سازی: چارچوبی است برای بررسی سیگنال‌ها و داده‌ها در مقیاس‌های مختلف. در این روش، داده به صورت سلسله مراتبی به بخش‌های نسبتاَ کلی و جزئیاتی تقسیم می‌شود تا امکان مشاهده همزمان رفتار کلی و تغییرات سریع را فراهم کند. این آنالیز اساس نظریه موجک‌هاست و در مقایسه با آنالیز فوریه توانائی بیشتری در تحلیل موضعی دارد.

این اصطلاح آشکوبه‌ای را از کتابی [۲] اقتباس کرده‌ایم که مولف آن مدعی ابداع آن نیست؛ ضمنا خواننده را به خواندن صفحات ۱۵ تا ۱۸ همان کتاب تشویق می‌کنیم.
برای عینی‌سازی مفهوم «تقریبات آشکوبه‌ای» و پیوند آن با نمونه‌های تاریخی و کاربردی، در ادامه چند مثال از حوزه‌های مختلف ارائه شده است. برای حظ بصر خواننده، تصویری از نمای یک بنای سنتی با بادگیرها و حیاط میانی (شکل ۱) اضافه کرده‌ایم که در آن هر لایه با یک معماریِ مجزا نقش و اطلاعاتی خاص خود دارد و با افزودن لایه‌های بالاتر، ساختارهای اطلاعاتیِ مراحل قبلی پابرجا هستند.

شکل ۱. بنای آشکوبه‌ای خانه آقازاده، واقع در ابرکوه، استان یزد

۲. کسرهای دودوئی

بسط‌های دودوئی و دهدهی و شصت‌شصتی که از گذشته دور رایج بوده‌اند، از ساختارهای آشکوبه‌ای مشابهی برخوردارند که ما در این مقاله به بسط دودوئی بسنده می‌کنیم. از ۳۱۰۰ تا ۲۰۰۰ ق.م.، کشاورزان مصری، پنج تا کسر دودوئی (نصف، ربع، یک‌هشتم، ... تا یک‌شصت‌وچهارم) داشتند که در توزین و توزیع روزانه‌شان استفاده می‌شد و یک کسر دوسوم هم داشتند که با کسرهای دودوئی ترکیب می‌شد و در نگهداری حساب سال و ماه به کار می‌رفت. بنابراین اگر ۱۱ نان را به سرکارگری می‌دادند که بین ۵ کارگر توزیع کند، آن کار را در سه مرحله به شرح جدول ۱ انجام می‌داد.

جدول ۱. تقسیم ۱۱ نان بین ۵ کارگر در مصر بسیار قدیم

مرحله	کسر و خارج قسمت	باقیمانده
1	$\frac{11}{5} = \frac{5+5+1}{5} = 2$	$1 = 5\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right)$
2	$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8} = 5\left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)$
3	$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{16} = 4(\frac{1}{64})$

ملاحظه کنید که در مرحله اول به هر نفر ۲ قرص نان رسید. یک نان باقیمانده ارزش پنج قسمت شدن را داشت ولی ابزاری برای ایجاد $\frac{1}{5}$ نبود. (امروزه هم اگر از ما بخواهند دایره‌ای را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم، بدون نقاله درد سر خواهیم داشت.) لذا نان را نصف کردند که به یمن تقارن دایره، کار مشکلی نبود. دو نیمه نان را نمی‌شد به ۵ نفر داد لذا هر نصفه را نصف کردند، باز هم نشد؛ بار سوم که قطعات حاصل را نصف کردند، ۸ قطعه $\frac{1}{8}$ تولید شد و به هر نفر یک قطعه $\frac{1}{8}$ رسید و سه قطعه $\frac{1}{8}$ هم باقی‌ماند. قطعه‌های باقیمانده را نصف کردند، شش قطعه $\frac{1}{16}$ تولید شد که به هر نفر یک قطعه رسید و ۱ قطعه $\frac{1}{16}$ هم باقی ماند. اگر این قطعه را هم نصف و نصفه‌ها را دوباره نصف می‌کردند، به چهار قطعه $\frac{1}{64}$ می‌رسیدند که نه می‌شد بین ۵ کارگر تقسیم کرد و نه می‌شد نصف کردن را ادامه داد چون به دلائلی کسر $\frac{1}{128}$ در فرهنگ مصری وجود نداشت. لذا تقسیم به همان جا ختم شد و لابد سه قطعه باقیمانده هم به خزانه برگشت! در زمان دودمان یازدهم که صنعت داروسازی پیشرفت کرد و قدرت داروسازان بر کاهنان چربید، با حفظ حرمت

پنج کسر مقدس $\frac{1}{2}$ تا $\frac{1}{64}$، انواع کسرهای دیگر هم به کار گرفته شد. چون پادشاهی به دودمان دوازدهم (۲۰۰۰ ق.م.) رسید، از اهمیت کسرهای دودوئی کاسته شد و همه کسرهای با صورت ۱ به عنوان ابزارهایی تعریف شده وارد زندگی و کار مصری‌ها شدند. توجه کنید که کاهنان و ریاضی‌دانان (دست در دست هم) همه سنگرها را خالی نکردند و مثلا بجز دوسوم که به طور طبیعی خودش را در دل کشاورزان جا کرده بود، هیچ کسر با صورت ۲ یا بیشتر را مجوز ورود به عرصه ریاضیات ندادند. یعنی کسر مجوزداری مانند $\frac{1}{5}$ که قبلا به صورت تقریبی « $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{16}$ » اظهار وجود می‌کرد، حالا خودش مستقیما به عنوان یک کسر تعریف شده، یک سنجه پذیرفته شده عرض اندام می‌کند، اما کسر دوپنجم هنوز حق اظهار وجود ندارد و نمی‌تواند خود را به عنوان دوبرابر یک پنجم معرفی کند. کسر دوپنجم اگر نمی‌خواهد به روش آشکوبه‌ای با کسرهای دودوئی به صورت « $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{64}$ » تقریب زده شود باید چند تا کسر متفاوت با صورت‌های ۱ پیدا کند که مساوی مجموع آن‌ها شود؛ مثلا $\frac{2}{5}$ می‌بایست به صورتی مانند $\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$ اظهار وجود کند. بنابراین، مصری‌ها کسرهای یک‌پنجم، یک‌سوم و یک‌پانزدهم را مستقیما می‌شناختند ولی دوپنجم را مستقیما نمی‌شناختند (یا اجازه نداشتند بشناسند) و می‌بایست آن را به صورت «$\frac{1}{15}$ و $\frac{1}{3}$» ببینند[۳]

کامپیوتر و رایانه دو اصطلاح علمی مترادف با دو معنای متفاوت هستند؛ یکی محاسبه می‌کند و اطلاعات تازه تولید می‌کند، دیگری اطلاعات تازه را برای سهولت دسترسی، طبقه بندی می‌کند. متاسفانه مصری‌ها با معرفی نیم‌بند کسرهای یکین (یک‌چندم‌ها)، از هر دو نعمت محروم شدند؛ نه می‌توانستند عددهایشان را به راحتی طبقه بندی کنند و نه الگوریتم ساده‌ای برای مقایسه و ارزشیابی کسرهایشان داشتند. از آن پس نیز مصر رونق علمی خود را از دست داد و عصر طلائی علمی‌اش به دوران‌هائی از جهانگیری‌های کم دوام و افت و خیزهای سیاسی فرساینده و لاجرم خفقان‌های داخلی مبدل شد.

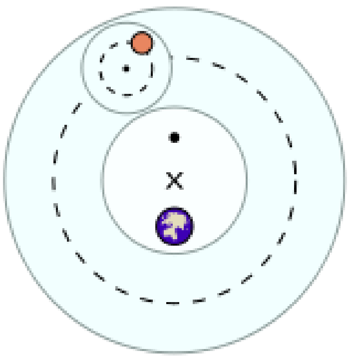
۳. نظام فلکی سیارات

منجمان یونانی از چند قرن قبل از میلاد، که فرضیه غلط زمین‌مرکزی را مبنا گرفتند، با برداشتی از مشاهدات ابتدائی خود، همه اجرام آسمانی را بر فلک ثابتی (سقف مقرنس) قرار دادند که در شبانه روز یک بار حول (محور) زمین می‌چرخید و مرکز زمین، مرکز عالم محسوب می‌شد. علاوه بر این، خورشید و سیارات شناخته شده نیز، گردش‌های متفاوتی داشتند که هر کدامشان، به زعم یونانیان اولیه، در فلک جداگانه‌ای حول مرکز زمین می‌چرخیدند. دانشمندان اسلامی، به ویژه ابوریحان بیرونی (۹۷۳ تا ۱۰۴۸م.)، هریک از فلک‌های خورشید یا سیارات را به دایره‌ای خلاصه می‌کردند که همان مسیر سیاره بود [۴]،[۵]. ما نیز، از این به بعد، همین تعریف را برای خورشید و سیارات می‌پذیریم. با دقیق‌تر شدن رصد سیارات، یونانیان پی بردند که مدار سیارات گرد نیست و مثلا عطارد که عین خورشید سالی یک بار دور زمین می‌چرخد، مرکزش روی فلک باقی نمی‌ماند و بالا و پائین می‌شود. ده سال طول می‌کشید تا عطارد به وضعیتی که قبلا رصد شده برگردد و در این مدت ده بار زمین را دور می‌زد. (در شکل ۴ روی یکی از منحنی‌ها حرکت کنید و تعداد دورها را بشمارید تا به نقطه اول برسید؛ این شکل‌ها از ویکی‌پدیا کپی شده است و اعتراف باید کرد که گرچه به عنوان مرجع اعلام نشده است ولی بدون آن نوشتن این مقاله مقدور نبود.) سیاره زهره هم وضع مشابهی داشت و اوضاع سیارات عُلوی مانند مریخ و مشتری به مراتب پیچیده‌تر بود. چون هدف ما نجوم نیست، فقط بر سیارات سُفلی و آن هم، به عنوان مثالی که بیشتر در کانون توجه منجمین اسلامی بوده است، فقط بر عطارد تمرکز می‌کنیم. منجمان یونانی، برای این که مشکل عطارد حل شود یک فلک کوچک برایش اضافه کردند؛ خودش روی پیرامون فلک کوچک می‌چرخید و مرکز این فلک نیز روی فلک اولیه، زمین را دور می‌زد. فیلسوفان یونانی هم بی‌کار نبودند و در ازای هر فلکی که منجم یونانی تعبیه می‌کرد، یک یا دو فلک هم آنان می‌افزودند تا سیاره را به حرکت وادارد. فلک‌های ریاضیدانان و منجمان را کپرنیک[1] (۱۴۷۳ تا ۱۵۴۳م.) و کپلر[2] (۱۵۷۱ تا ۱۶۳۰م.) از گنبد مقرنس پاک کردند و با بیدار کردن زمین از خواب ناز، او را همراه با سایر سیارات در مدارهائی مدور یا بیضوی به گردش دور خورشید وا داشتند. فلک‌های ارسطو و سایر فیلسوفان را هم، نیوتن با قوانین خودش فروریخت و اراده حرکت را به دست نیروی جاذبه سپرد. آنچه در این مقاله مدّ نظر ما خواهد بود، دایره‌های روی هم سوار شده ریاضی‌دانان و منجمان برای نمایش مسیر گردش عطارد است و کاری به عامل حرکت عطارد نداریم. همان طور که گفتیم، برای یافتن مسیر عطارد، آن را در حال چرخش بر دایره‌ای فرض کردند که مرکزش بر دایره دیگری حول زمین می‌چرخید. اگر به جای دایره مثلا بیضی را می‌گذاشتند شاید به جواب مطلوب نزدیک‌تر می‌شدند ولی باور نمی‌کردند که طبیعت آنقدر بدسلیقه باشد که شکل زیبای دایره را رها کند و به جایش شکل قناس بیضی را بگذارد. (وقتی که از افلاطون دلیل بزرگ‌تر بودن مساحت سطح دایره از مساحت هر شکل دیگری با همان اندازه محیط را خواسته بودند، جوابی به این مضمون داده بود که شکلی زیباتر از دایره نیست.)

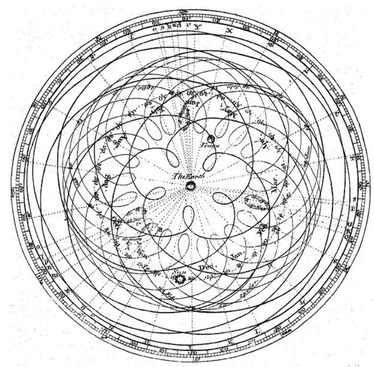
برای رفع تناقضات رو به افزایش مسیر حرکت عطارد، تعداد این دایره‌ها مرتباً افزوده می‌شد؛ به طوری که چون نوبت به قطب‌الدین شیرازی (۱۲۳۶ تا ۱۳۱۱م.) شاگرد برجسته خواجه نصیرالدین توسی (۱۲۰۱ تا ۱۲۷۴م.) رسید، عطارد را ۱۰ فلک بود [۲۰]. به علاوه، بطلمیوس (۹۰ تا ۱۶۸م.) نیز برای توجیه انحراف از استوای

1. Nicolaus Copernicus
2. Johannes Kepler

زمین، مرکز بزرگترین فلک عطارد را کمی جابه‌جا کرد. یک تغییر بنیادی هم خواجه نصیر توسی داده بود که عطارد سه فلک دایره‌ای داشت ولی رونق نگرفت و حتی شاگرد خودش هم راه دیگری پیمود. در الگوی توسی، فلک اول عطارد حول زمین می‌چرخید و مرکز فلک دوم را با خود می‌برد اما وضعیت این دو فلک نسبت به هم ثابت بود. عطارد بر محیط فلک سوم که قطرش مساوی شعاع فلک دوم بود قرار داشت و نسبت به آن فلک ثابت بود اما فلک سوم توی فلک دوم بر محیط آن می‌لغزید و سرعت‌های فلک اول و فلک سوم چنان تنظیم شده بود که مسیر عطارد شبیه منحنی نمایش $y=\sin x$ شده بود که محور xها را روی محیط فلک اول خمانده باشند. ابوالعلاء قوشچی (۱۴۰۳ تا ۱۴۷۴م.) نیز با انتقاد بر فلک‌های بطلمیوسی تعداد وترتیب و مرکزهای افلاک عطارد را تغییر داد که جرج سالیبا[1] [۶] صرفنظر از درست یا غلط بودن فرضیه زمین‌مرکزی، کار ریاضی انجام شده در آن را یک پژوهش اصیل و عمیق می‌داند. طبیعتا این پیچیدگی‌ها، سروصدای عده‌ای را هم بلند می‌کرد و خواستار ترک تفکر دردسرساز زمین‌مرکزی می‌شدند. دانشمندان دوره اسلامی چه موافق چه مخالف، همین الگوهای فلک بر فلک یونانی را به کار می‌بستند و نتیجه‌های خوبی هم می‌گرفتند. خواجه نصیر و ابن‌شاطر (۱۳۰۴ تا ۱۳۷۵م.) گرچه تا پایان عمر بر فرضیه زمین‌مرکزی وفادار ماندند، اما در عمل متوجه اشکالات دست و پاگیر آن شده و روش‌هائی برای رد، تایید یا اصلاح آن در نظر داشتند [۲۱]. بنا به تحقیقات جرج سالیبا، کپرنیک با پی‌گیری کار خواجه و سایر منجمان مراغه، تفکر زمین‌مرکزی را برای همیشه منسوخ و فرضیه خورشیدمرکزی را رواج داد. سالیبا با بررسی استدلال‌های اشتباه و برداشت‌های ناقص کپرنیک از قضیه دودایره خواجه نصیر و کپی برداری‌های ناشیانه از آن، نتیجه می‌گیرد که کپرنیک مسلما به رساله خواجه دسترسی داشته است [۷]. نگارنده اول مقاله حاضر اضافه می‌کند که با توجه به منش و رفتار پاک خانواده کپرنیک در طول عمر پرماجرایشان، سکوت در مورد استفاده از یک ریاضیدان و فقیه مسلمان را باید به حساب ترس او از دادگاه تفتیش عقاید و تکفیر کلیسا دانست چرا که تا صد سال پس از مرگ کپرنیک، دانشمندانی همچون گالیله (۱۵۶۴ تا ۱۶۴۲م.) به جرم طرفداری از نظریه خورشیدمرکزی او، مورد بازجوئی قرار می‌گرفتند و کمترین راه برای گریز از مجازات توبه و اعتراف بود. سهل انگاری کپرنیک نیز که در طلیعه رنسانس، کشف حقیقت را بعید نمی‌دید، باید عمدی دانست. کپرنیک به یمن نفوذ مثبت سیاسی و کمک‌های مالی شاهزادگان حامی، به رصدهائی از خورشید و سایر سیارات توفیق پیدا کرد که هیچ شکی در ذهن او در مورد خورشیدمرکزی باقی نگذاشت و او را مصمم ساخت با افزودن کارهای ریاضیدانان شرقی، تفکر پوسیده زمین مرکزی را ریشه کن کند و گرنه آنچه او به عنوان نتیجه ریاضی اعلام کرد، حکم غلط مدور بودن مسیر سیارات بود که صد سال بعد کپلر با تلفیقی از رصدهای جدید و کشفیات فیزیکی خود، توانست مدور بودن مسیر را رد و بیضی بودن آن را اثبات کند. تنها استفاده کپلر از نظریه کپرنیک، جرأت یافتن او در اعلام فرضیه خورشیدمرکزی بود. به هر حال، کپرنیک با بهره‌گیری از قدرت خود در لهستان، دوری از واتیکان، و احترامی که در خلال ماموریت‌های سیاسی‌اش در واتیکان ذخیره کرده بود، ضربه غافلگیرانه خود را بر تفکر پوسیده زمین مرکزی وارد آورد. گویند کپرنیک علی رغم اصرار دوستان و حامیانش، جرأت انتشار نظریه خود را نداشت و پس از آن که کتاب انقلابی‌اش را به چاپ رساندند و نسخه‌ای از آن را در بستر مرگ روی سینه‌اش گذاشتند، با نگاه رضایت‌آمیزی به جلد آن درگذشت. بعدها کپلر بر مبنای مشاهدات نجومی خود و اعتقاد التقاطی مسیحی-میترائی، نظریه کپرنیک را پذیرفت و همان طور که گفتیم با سعی و خطا آن قدر رصد و محاسبه کرد تا بیضوی بودن مسیر سیارات را به اثبات رساند.



شکل ۲. الگوی فلکی عطارد در نظریه زمین‌مرکزی



شکل ۳. مسیر یک سیاره با دو فلک

در شکل ۲، مرکز فلک اول عطارد را با × نمایش داده‌اند که طبق الگوی بطلمیوس بالای مرکز عالم (یعنی مرکز زمین) قرار گرفته است؛ دایره‌های خط‌چین، فلک‌های منجمان و ریاضی‌دانان را نمایش می‌دهند که منحنی مسیر عطارد را ترسیم می‌کنند. دایره‌های خط‌پر نیز فلک‌های فیلسوفان را نمایش می‌دهند که تاثیری در معادله مسیر ندارند ولی اگر نباشند عطارد از جایش تکان نمی‌خورد! شکل ۳ نیز احتمالا مسیر عطارد را در طول چند سال نشان می‌دهد که ۱۰ بار باید دور زمین بچرخد تا به همان وضعیت

1. Georg Saliba

اولش برگردد. خواجه نصیر با قضیه ۲–دایره خود الگوئی ساخت که سیاره در یک دور حول زمین، مسیر خودش را قطع نکند و از دید ناظر همواره در حرکت به جلو باشد.

از تفصیل تحولات مربوط به تعداد افلاک چشم می‌پوشیم و با جمع‌بندی همان بحث مسیرهای «دایره بر دایره،» بخش را به پایان می‌رسانیم. منجم عهد عتیق، با برداشت اولیه خود، مسیر عطارد را یک دایره ساده پنداشت. نسل به نسل که رصدها دقیق‌تر می‌شد، دایره‌های کوچکتر و کوچکتری برای تصحیح مسیر قبلی، اضافه می‌گردید. این که آیا به جواب بهتری نزدیک می‌شدند یا نه، محتاج بررسی بیشتری است ولی از آنجا که ناگهان منسوخ شد و کاربردی بر آن مترتب نبود، کسی آن را دنبال نکرد. ما خوشحالیم که بالاخره پس از حدود دوهزار سال، دانشمندان توانستند از قید یک باور غلط خلاص شوند ولی ضررش برای عالم ریاضی این بود که بحث شیرین مربوط به تجزیه توابع را ناگهان متوقف ساخت و تا دو سه قرن بعد که مک‌لورن (۱۶۹۸ تا ۱۷۴۶م.)، تیلور (۱۶۸۵ تا ۱۷۳۱م.) و فوریه[1] (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰م.)، سری‌های خود را کشف کردند، کسی به این نوع مسائل نپرداخت. روند فلک‌برفلک یونانی‌ها نیز به این دلیل از رونق افتاد که انگیزه‌اش بر یک نظریه غلط استوار بود؛ چندین بار فرض‌های اولیه‌اش تغییر کرد و نهایتا هم با شکست نظریه زمین‌مرکزی، از رونق افتاد. البته کشفیات خواجه نصیرالدین توسی و ابوالعلاء قوشچی نتایج جالبی بود که از درون همین مطالب جوشید ولی ابداع روشی منظم و آشکوبه‌ای برای تقریب توابع را به ریاضیدانان پس از خود که از اروپا سردرآوردند واگذاشتند. (به [۷] و مرجع‌های آن مرجعه کنید.)

۴. بسط تابع به سری

سری‌های تیلور [۸] و مک‌لورن [۹] به طور طبیعی از تعریف مشتق و خواص چندجمله‌ای‌ها و سری‌های شناخته شده بیرون آمدند. با توجه به این که ضرائب یک چندجمله‌ای به مشتقات آن ارتباط مستقیم دارد، ملاحظه می‌شد که ابتدائی‌ترین تقریب برای یک چندجمله‌ای در حوالی یک نقطه همان خط افقی $y=f(x_0)$ گذران بر آن نقطه است. حال اگر خط را دوران دهیم تا ضریب زاویه‌اش مساوی مشتق تابع گردد، تقریب مناسب‌تر

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

به دست می‌آید و همین طور سهمی

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

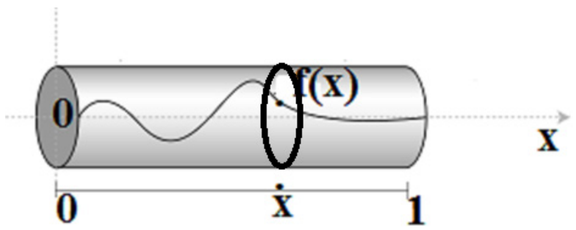
به مراتب تقریب بهتری را ارائه می‌کند و الی آخر در حالت $x_0=0$ سری به مک‌لورن منسوب است. بدون شک سری تیلور تقریبی کاملا موضعی برای تابع بوده و شرط قوی بینهایت بار مشتق‌پذیری را لازم دارد. سری فوریه از میانگین‌ها بهره می‌گیرد و در نتیجه بردی وسیعتر و کاربردی موثرتر دارد که ذیلا به آن می‌پردازیم.

فوریه (شکل ۴) با الهام از حالت‌های ساده معادله با مشتقات جزئی حرارت، جواب کلی آن معادله را به صورت مجموعی از منحنی‌های شناخته شده سینوس nx و کسینوس nx پذیرفت و بدون آن که به جزئیات و دقت عملیات ریاضی توجهی کند ضریب‌ها را چنان تعیین کرد که تابع حاصل در معادله حرارت صدق کند. ریاضیدانان بعدی، شرایطی تعیین کردند که کار فوریه بدون نقص باشد و اثبات‌هایش را راست و ریست کردند. کار مهم فوریه همان گام نخستین بود که برای تجزیه یک تابع دلخواه به تابع‌های سینوسی با فرکانس‌های بیشتر و بیشتر (یا به عبارت معادل دوره تناوب‌های ریزتر و ریزتر) برداشت ودنیای جدیدی در ریاضیات به نام آنالیز همساز (هارمونیک) آفرید که در خدمت مخابرات و کدگذاری و هزاران کاربرد ریز و درشت دیگر قرار گرفت.

فوریه [۱۰]، در مسئله فرضی حرارت، دو قاعده (x=۰ و x=1) میله‌ای به طول l=1 را بین دو قالب یخ در حال ذوب قرار داده و بقیه میله را گرم کرد تا درجه حرارت هر مقطع از میله به مقدار از پیش تعیین شده f(x) برسد که در این‌جا x فاصله مقطع از قاعده چپ میله در شکل زیر است. سپس در حالی که دو قاعده را در تمام مدت آزمایش در صفر درجه نگه می‌داشت بقیه میله را به حال خود واگذاشت تا روند آزاد تغییرات دما هر مقطع را در گذر زمان مطالعه کند. معادله با مشتقات جزئی حرارت را هم به صورت

$$u_t = \alpha u_{xx};\ \ u_t = \frac{\partial u}{\partial t};\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

فرض کرده بود که در آن u(x,t) دمای مقطع به فاصله x از مبدا در لحظه t بود.



وی فرض کرد یک جواب خصوصی معادله به صورت u(x,t)=X(x)T(t) باشد و آن را به سادگی حل کرد و بینهایت جواب به صورت

$$u_n(x,t) = D_n \mathrm{e}^{-\alpha n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

به دست آورد که در آنها n عددی طبیعی و D_n ضریبی ثابت بود. این جواب‌ها باید در معادله حرارت صدق کنند که می‌کنند (مشتقاتشان را بگیرید و امتحان کنید). اگر x را ۰ یا ۱ بگذارید

1. Joseph Fourier

می‌بینید که درجه حرارت ۰ می‌شود و همین انتظار را هم داشتیم چون دو سر میله دائما به یخ مذاب چسبیده بود. اما یک شرط آن درست نیست و آن دماهای طول میله در لحظه آغازین! یعنی وقتی که میله را به حال خود رها کردیم (در لحظه t=0)، دما در هر نقطه x مساوی

$$u(x,0) = f(x)$$

بود ولی حالا مساوی $D_n \sin(n\pi x)$ شده است. طبیعت خطی معادله این امید را به ما می‌دهد که شاید با ترکیبات خطی جواب‌های خصوصی، بتوانیم به جواب مطلوب برسیم. فوریه، جهت احتیاط، همه آنها را در یک ترکیب خطی که متخصصان جبر آن را به رسمیت نمی‌شناسند و متخصصان آنالیز هم به حرمت جبری‌ها نامش را سری گذاشته‌اند به کار گرفت و جوابی را به صورت زیر به امتحان گذاشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\alpha n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

گوش آنالیزدان کر، این تابع در همه شرطهای معادله دما صدق کرد مگر شرط

$$u(x,0) = f(x)$$

که آن هم خوشبختانه با اختیار مناسب ضریب‌ها برقرار شد. برای یافتن ضریب‌های D_n، طرفین معادله

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x)$$

را در $\sin(m\pi x)$ ضرب کرد و از حاصل انتگرال گرفت. برای هر یک از ضریب‌ها به رابطه زیر رسید:

$$D_m = 2\int_0^1 f(x)\sin(m\pi x)dx.$$

شکل ۳. ژوزف فوریه (۱۷۶۸–۱۸۳۰م.)

فوریه که علاوه بر ریاضیات به سایر کارهای علمی حتی مصرشناسی و محیط زیست‌شناسی هم علاقمند بود فرصتی برای دقت در کارهای ریاضی پیدا نمی‌کرد. مخصوصا که مدت‌ها همراه فرمانده محبوب خود، ناپلئون بناپارت، در کشورگشائی‌های او شرکت می‌جست. (بر خلاف ابوریحان بیرونی که همراه سلطان محمود غزنوی به هند می‌رفت ولی اشتیاقی به کشورگشائی‌های سلطان نشان نمی‌داد.) فوریه مدت‌ها به ساختن دانشگاه فرانسوی مصر و مدیریت آن مشغول بود به فرانسه هم که برمی‌گشت به خواهش ناپلئون سمت‌های بالای اداری را می‌پذیرفت. اما ریاضیدانان کارهای او را با اشتیاق دنبال می‌کردند، اشتباهات او را زیر نظر داشتند و نظریات او را تعمیم می‌دادند. گرچه بسط توابع از یک قرن پیش توسط تیلور و دیگران شروع شده بود ولی اولین بار آنالیزدانان می‌دیدند که فوریه راهی برای تجزیه یک تابع سلندر (بر وزن و معنای قلندر= نتراشیده و نخراشیده) به توابع موزون سینوسی پیدا کرده است. طبیعتا برخی شیفته، برخی منتقد و برخی هم مدعی بودند؛ اما در مجموع، نام فوریه به عنوان بنیان گذار سری‌های فوریه در تاریخ علم به ثبت رسید و حتی تبدیل‌های فوریه را هم که ریاضیدانان پس از مرگ او از تعمیم سری‌های فوریه به دست آوردند به وی نامدار کردند [۱۰]. (مرجع [۱۱] نیز با بحث تاریخی مفیدی از سری‌های فوریه شروع می‌شود.)

فوریه برای آن که ثابت کند هر تابعی را می‌تواند به صورت مجموع بینهایتی از سینوس‌ها بنویسد مثال‌های دیگری هم به نمایش گذاشت. آنالیزدانان متوجه شدند که گرچه تابع f در مسئله فوریه روی بازه [0,1] تعریف شده ولی سری فوریه متناظر آن برای تابع متناوب (فرد) g با دوره تناوب [1,+1] و ضابطه زیر نیز معتبر است

$$g(-x) = -g(x);\ \ g(|x|) = f(|x|); x \in [-1,+1].$$

اما اگر بخواهند تابع‌های زوج و غیره را بسط دهند باید کسینوس‌ها را به میان آورند. نظریه فوریه به سرعت راه خود را در همه علوم دیگر گشود و اصطلاحات علمی جدیدی به عرصه دانش بشری وارد کرد که مهم‌ترین آنها «پردازش پیام» یا «پیام‌پردازی» بود. البته این یک اصطلاح عام است و به هر تابعی که در اصطلاح فیزیکدانان انرژی متناهی داشته باشد اطلاق می‌شود. در پیام‌پردازی، هر زیر فضا از یک فضای هیلبرت جدائی‌پذیر (معمولا $L^2(\mu)$) را یک مجموعه از پیام‌ها نامیده و برخلاف انتظار ریاضی‌دانان ترجیح می‌دهند اسکالرهای مورد استفاده‌شان عددهای مختلط باشند. چیزیکه ریاضی‌دانان هم استقبال می‌کنند و به جای سینوس و کسینوس، ترکیبات زیر را به کار می‌گیرند:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

با استفاده از این فرمول‌ها سری فوریه و ضرایب آن برای هر تابع f با دوره تناوب [-1,+1] به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\pi x};\ \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} f(x)e^{-in\pi x}dx; n \in \mathbb{Z}.$$

این عددهای مختلط $\hat{f}(n)$ را ضرایب بسط فوریه می‌نامند و ما از این پس به جای سینوس و کسینوس از تابع‌های نمائی صحبت خواهیم کرد. بعدها که نظریه انتگرال لبگ قدرت

گرفت و همگرائی‌های جوراجور به عالم آنالیز راه پیدا کرد، ریاضیدانان متوجه شدند که اگر بر همگرائی یکنواخت اصرار نورزند و به همگرائی‌های ضعیف‌تری مانند همگرائی در فضای هیلبرت $L^2(-1,+1)$ قانع باشند، سری فوق را برای تابع‌های کلی‌تر می‌توانند بنویسند. از این پس، ما این فرض را به فرضیات پس‌زمینه خود اضافه می‌کنیم و خواننده را هم به رها کردن خود از قید توپولوژی انعطاف‌ناپذیر همگرائی یکنواخت تشویق می‌کنیم. ضمنا مشابه آنچه که برای بازه $[-1,+1]$ گفته شد برای هر بازه $[a,b]$ هم درست است ولی ضرایبی باید کم و اضافه شود که ما ذیلا در مورد بازه $[0,\alpha]$ به کار می‌گیریم.

اگر $f \epsilon L^2(0,\alpha)$ پیام مورد نظر باشد، پردازش آن چیزی نیست مگر قیچی کردن سری فوریه آن که تعداد جملات باقی‌مانده به دقت مورد نیاز و امکانات رایانه‌ای ما بستگی دارد. البته همان طور که امروزه، کارهای نظری مبحث انتگرال را با جمع‌های ریمانی ولی محاسبات عددی‌اش را با قاعده‌های ذوزنقه‌ای و سیمپسون[1] و غیره انجام می‌دهند، در امر پردازش پیام نیز سری‌های فوریه ارزش‌های اقتصادی خود را از دست داده‌اند و به جایشان از چیزهای دیگری با نام عمومی موجک استفاده می‌کنند. به هر حال، چند سال پیش که با تلفن راه دور صحبت می‌کردیم، در هر α ثانیه، نمونه‌ای از صدای ما برداشته می‌شد که همان پیام $f \epsilon L^2(0,\alpha)$ بود. این نمونه، همزمان وارد $2N+1$ دستگاه می‌شد که کار هر کدامشان محاسبه یکی از انتگرال‌های زیر بود:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\alpha f(x) e^{-\frac{2in\pi x}{\alpha}} dx; n = 0. \pm 1. \pm 2. \dots . \pm N$$

این $2N+1$ عدد را مخابرات مبدا به مخابرات مقصد گسیل می‌کرد که در آنجا به همین تعداد دستگاه وارد می‌شدند و جملات سری زیر را می‌ساختند:

$$f_\# = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{2in\pi x}{\alpha}}.$$

این سری قیچی شده صدائی شبیه صدای گوینده در گوش شنونده طنین انداز می‌کند. صدای اصلی گوینده نیز همین سری بود که بینهایت جمله داشت. اگر α مثلا یک‌صدم ثانیه بود، برای هر یک دقیقه صحبت شما، این زنجیره را ۶۰۰۰ بار تکرار می‌کردند و در هر بار هم $2N+1$ انتگرال می‌گرفتند و به مقصد می‌فرستادند و بازسازی می‌کردند. البته گوش انسان این توانائی را دارد که طیف صداهای تولید شده را با هم ترکیب کند.

همان طور که گفتیم، این روزها پردازش پیام‌ها تغییر کرده است و در آن‌ها به جای سینوس و کسینوس از موجک‌ها استفاده می‌شود. تعریف و توجیه موجک‌ها را به بخش‌های بعدی وامی‌گذاریم و در باقی‌مانده این بخش، به تعمیمی از سری فوریه به نام *تبدیل فوریه* می‌پردازیم.

کاربرد سری فوریه منحصر به بازه‌های کران‌دار است و همه تابع‌های با انرژی متناهی (یعنی $L^2(a,b)$) را پوشش می‌دهد. گاه پیش می‌آید که همزمان، خانواده وسیعی از تابع‌ها را بررسی می‌کنیم که دامنه زندگی متفاوتی دارند و مجبوریم $L^2(\mathbb{R})$ را در نظر بگیریم تا همه پیام‌ها را یک‌جا پوشش دهد. متاسفانه در چنین فضای بی‌کرانی که تابع‌های نمائی برای موجودیت خود نیاز به انرژی بینهایتی دارند، از لحاظ فیزیکی بی‌معنا هستند. از لحاظ ریاضی نیز فقط فضایی مانند $L^\infty(\mathbb{R})$ می‌تواند پذیرای عضویتشان باشد. ریاضی‌دانان پس از فوریه، هر موج دلخواه f را که توان‌های اول و دومش انتگرال‌پذیر بود، به یک بازه $[-T,+T]$ تحدید کردند و f_T (تابع تحدید شده) را بر حسب سری فوریه آن به شرح زیر به دست آوردند. عدد طبیعی N را با فرض $T<N$ در نظر بگیرید. آنگاه

$$f_T(x) = lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_T(n) \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{2in\pi x}{2N}}$$

$$(z_n = \tfrac{n}{2N}) \qquad = lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N} \textstyle\sum_{-N}^{N} e^{\frac{2in\pi x}{2N}} \int_{-T}^{T} f_T(y) e^{-\frac{2in\pi y}{2N}} dy$$

$$= lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N} e^{2i\pi x z_n} \int_{-T}^{T} f_T(y) e^{-2i\pi y z_n} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^{T} e^{2i\pi xz} f_T(y) e^{-2i\pi yz} dy dz.$$

حال اگر T را به بینهایت میل دهیم بنا به قضایای انتگرال لبگ،

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xz} \{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2i\pi yz} dy\} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xz} \tilde{f}(z) dz,$$

که در آن تابع $\tilde{f}$ را تبدیل فوریه تابع f می‌نامند و مقدارش با انتگرال داخل $\{\dots\}$ در فرمول اخیر تعریف می‌شود. چون به ندرت اتفاق می‌افتد که هم سری فوریه و هم تبدیل فوریه یک تابع را در یک مسئله حساب کنند، لذا هم سری فوریه و هم تبدیل فوریه را با نماد مشترک $\hat{f}$ نمایش می‌دهند که ما هم رعایت می‌کنیم.

فایده تبدیل فوریه این است که همانند سری فوریه برگشت‌پذیر است یعنی از روی آن می‌شود تابع اصلی را به دست آورد و ثانیا تابع اصلی هر چقدر هم ناپیوسته باشد تبدیل فوریه آن پیوسته است و در بینهایت به صفر میل می‌کند. از این رو اگر بخواهند پیام ناپیوس و نامنظمی را ذخیره کنند بهتر است تبدیل فوریه آن را ذخیره کنند که خطای بازخوانی‌اش کمتر باشد.

۵. تبدیل فوریه پنجره‌ای

سری یا تبدیل فوریه تبیین می‌کند که موج f برایند بینهایت موج

1. Trapezoidal & Simpson's rules

نمائی با فرکانس‌های مختلف f به شدت $\hat{f}(y)$ است. بدیهی است که $\hat{f}(y)$ نمایشگر مقدار متوسط موج با فرکانس y در یک مدت نسبتا طولانی است. گابور (۱۹۰۰ تا ۱۹۷۹م.) علاقمند بود این اطلاعات را موضعی کند [۱۲]. مثال تلفن را که قبلا دیدیم نوعی موضعی کردن بود. اگر ما تمام مکالمه یک دقیقه‌ای را یک موج فرض کنیم و سری فوریه آن را به دست آوریم صدای بازسازی شده به هیچ وجه شباهتی به صدای اولیه نخواهد داشت. لذا زمان را به قطعات بسیار کوتاه تقسیم کردیم و با پردازش هر قطعه از صدا و ارسال بلافاصله آن، علاوه بر حفظ پیوستگی کلام، شباهت صدای بازسازی شده را به صدای اصلی بیشتر کردیم. در حقیقت، ما پیام یک‌دقیقه‌ای f را در تابع مشخصه بازه‌های زمانی $[0,\alpha]$ و $[\alpha,2\alpha]$ و ... و $[(K-1)\alpha,K\alpha]$ ضرب کردیم و پیام مربوط به هر بازه را جداگانه گسیل کردیم. (در اینجا $K\alpha=1$.) این تابع مشخصه همچون پنجره دوربین عکاسی است که هر α ثانیه یک عکس برمی‌دارد و ما آن عکس را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. در اصطلاح آنالیز هارمونیک به آن سری فوریه کوته–زمان گفته می‌شود و فرمول کلی آن در حالت $\alpha=1$ به شرح زیر است:

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}_k(n)e^{2\pi inx};\ (x\in\mathbb{R});\ f_k(y)=f(y+k);\ 0\le y\le 1.$$

آن چه در بالا آمد مانند نوشتن پیام روی برگه نت‌های موسیقی است. مثلا پنج خط حامل زیر، حدود ۱۰ ثانیه از آهنگ سرود ای ایران را با پیانو نمایش می‌دهد که به پنج «میزان» دو ثانیه‌ای تقسیم شده است. اما میزان در برگه نت موسیقی بسیار بزرگتر از آن است که نقش پنجره را بازی کند و فقط کنترلی است برای نوازنده که وقت خود را تنظیم کند؛ نه عقب بماند، نه جلو بیفتد. از نظر نوازنده یا آهنگساز، زمان کوتاهی که هر نت نواخته می‌شود (و همانطور که در شکل ۵ می‌بینید در پیانو می‌تواند دو نت همزمان دست‌های چپ و راست باشد) پنجره مناسبی است. اما گوش شنونده یا دستگاه تجزیه کننده صوت، می‌تواند پنجره‌های بسیار کوتاه‌تری داشته باشد.

شکل ۵. نت موسیقی در پیانو

گابور[۱] (شکل ۶) حالت پیوسته را مد نظر داشت یعنی می‌خواست دوربین به طور پیوسته عکس بگیرد و احتمالا از ناهنجاری‌های مرزی دو قاب متوالی هم دلخوش نبود. لذا وی در سال ۱۹۴۶ همزمان با اخذ جایزه نوبل، مقاله‌ای منتشر کرد که در آن از تابع پیوسته متقارنی مانند تابع نرمال گوس، پنجره مطلوب خود را ساخت و از روزنه آن به نظاره خواص موضعی پیام‌ها پرداخت [۱۲].

امروزه ما می‌توانیم هر تابع با انرژی متناهی g را به عنوان پنجره انتخاب کنیم. فرض کنید $g\in L^2(\mathbb{R})$ به عنوان پنجره و $f\in L^2(\mathbb{R})$ به عنوان پیام داده شده باشند. آنگاه

$$f(x)=\frac{1}{||g||_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_u(z)g(x-u)e^{2\pi izx}\,dzdu$$

که در آن $f_u(y)=f(y)\,g(y-u)$. البته $g(y-u)e^{2\pi iyx}$ را می‌توان به عنوان میزانی از وجود موج ساده $\hat{f}_u(z)$ در پیام f در لحظه u تعبیر کرد.

شکل ۶. دنیس گابور(۱۹۰۰–۱۹۷۹م)

۶. مثال هار[۲]

تبدیل‌های پیوسته فوریه گرچه ابزار مفیدی برای تقریب بودند ولی به علت ناگسستگی، نظم آشکوبه‌ای سری‌های فوریه، فلک‌برفلک‌های منجمان و یا دستگاه‌های دودوئی و دهدهی و شصت‌شصتی اعداد را نداشتند. همان طور که در سری‌های فوریه ملاحظه می‌کنیم، تقریب یک تابع پیوسته متناوب، از تابع ثابت $c_0\cos(0x)$ شروع می‌شود که c_0 میانگین تابع مورد نظر است. سپس عمل تقریب، با سینوس‌ها و کسینوس‌های 2x و 3x و 4x و غیره جلو می‌رود و در هیچ مرحله‌ای، تقریبات و اطلاعات حاصل از مراحل قبل، از بین نمی‌رود.

اولین کار بعد از فوریه در مورد تقریب توابع، توسط هار (۱۸۸۵ تا ۱۹۳۳م.) انجام گرفت که از آشکوبه‌ای دودوئی نیز برخوردار بود. هار که رساله دکتری‌اش را زیر نظر هیلبرت[۳] (۱۸۶۲ تا ۱۹۴۳م.) می‌گذراند توابعی ساخت که برای فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل یک پایه متعامد یکه می‌دادند[۱۳]. این توابع مثل کسرهای دودوئی مصری ساختار منظمی داشتند. در نظر داشته باشید که هر عدد حقیقی (مثبت) x را بر حسب کسرهای دودوئی به صورت

$$x=\lfloor x\rfloor+\frac{x_1}{2^1}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\cdots$$

1. Dennis Gabor
2. Alfréd Haar
3. David Hilbert

می‌نویسند که در آن $[x]$ نمودار جزء صحیح است و x^1 و x^2 و x^3 و ... یکی از دو رقم ۰ یا ۱ هستند. در مثال هار، نخست فضای $L^2(\mathbb{R})$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنند تا نوعی موضعی شدن برقرار گردد:

$$L^2(\mathbb{R}) = \cdots \oplus L^2([-1,0]) \oplus L^2([0,1]) \oplus L^2([1,2]) \oplus L^2([2,3]) \oplus \ldots.$$

حالا کافی است که هم و غم خود را روی $L^2([0,1])$ متمرکز کنیم زیرا هر پایه متعامد یکه‌ای که برای این زیرفضا به دست آید انتقال‌های صحیحش (به چپ و راست) یک پایه متعامد یکه برای کل فضا خواهد شد. نویسنده اول دسترسی به رساله هار نداشت ولی چون هدفش با او فرق می‌کند با دیدگاه دیگری تابع‌های پایه‌ای او را می‌سازد. تابع $f \epsilon L^2([0,1])$ را به دلخواه در نظر بگیرید. اگر عدد می‌بود، جزء صحیحش را به عنوان اولین تقریب در نظر می‌گرفتیم. ولی حالا که تابع است، نظم دودوئی را روی دامنه‌اش پیاده می‌کنیم و تقریبمان را از یک تابع ثابت شروع می‌کنیم. چون در فضای هیلبرت هم هستیم و تقریبات با تصویر کردن به دست می‌آیند پس آن را در بردار یکه $\chi_{[0,1]}$ ضرب داخلی می‌کنیم تا عدد c_0 (میانگین تابع در بازه یکه) به دست آید.

پس اولین تقریب برای f به صورت $c_0\chi_{[0,1]}$ به دست می‌آید. تابع باقیمانده یعنی $f - c_0\chi_{[0,1]}$ گاهی بالای محور ایکس‌ها و گاهی زیر آن است. پس فاصله [0,1] را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و تفاضل دو تابع مشخصه آن‌ها را عضو دوم پایه می‌گیریم که خوشبختانه نرم آن ۱ می‌باشد و بر بردار (تابع) $\chi_{[0,1]}$ عمود است. بدین ترتیب $\chi_{[0,2^{-1}]} - \chi_{[0,2^{-1}]}$ به عنوان دومین عضو پایه به دست می‌آید و تابع دلخواه f هم به صورت زیر با آن دو تابع تقریب زده می‌شود:

$$f \approx c_0\chi_{[0,1]} + c_1(\chi_{[0,2^{-1}]} - \chi_{[0,2^{-1}]}).$$

ثابت c_1 بسته به علامت جبری خود نمایشگر میزان افت یا خیز تابع از چپ به راست است. حال با استقرا می‌توان هر نصفه بازه را نصف کرد و نصف کردن را ادامه داد و در هر مرحله، تفاضل تابع‌های مشخصه دو بازه حاصل را عضو جدید پایه گرفت. هر عضو جدید بر همه عضوهای هم‌نسل و عضوهای نسل‌های قبلی عمود است، اما نرم آن ممکن است ۱ نباشد که آنهم با ضرب تابع در یک عدد ثابت مناسب، جبران می‌شود. بنابراین، پایه متعامد یکه مطلوب برای $L^2(\mathbb{R})$ به صورت $\cup_{j\geq 0}\mathcal{B}_j$ در آمد که در آن

$$\mathcal{B}_0 = \{v_0(x+k): k \in \mathbb{Z}\};\ v_0 = \chi_{[0,1]};$$

$$\mathcal{B}_j = \{v_j(x + k2^{j-1}): k \in \mathbb{Z}\};$$

$$v_j = \sqrt{2}^{(j-1)}\left(\chi_{[0.2^{-j}]} - \chi_{[2^{-j}\text{و}2^{-j+1}]}\right);\ j > 0.$$

در دهه ۱۹۳۰ تابع‌های هار توسط لِوی[1] (۱۸۸۶ تا ۱۹۷۱م.) در مطالعه حرکت براونی مورد استفاده قرار گرفت و نتیجه رضایت‌بخش‌تر از سری‌های فوریه بود [۱۴]. گابور و سایر فیزیک‌دانان، تابع‌های هار را که بعدها نام موجک‌های هار به خود گرفتند در پیش چشم داشتند ولی به دنبال پنجره‌هایی پیوسته و مشتق‌پذیر بودند. اما نظام آشکوبه دودوئی تابع‌های هار مزیتی است که در نظام آشکوبه‌ای سری‌های فوریه موجود نیست و مبحث آنالیز چندریزه‌سازی که در بخش‌های بعدی به آن خواهیم پرداخت تعمیمی از مثال هار بود.

۷. موجک‌ها

با این که پنجره‌های گابور، اطلاعات زیادی در مورد امواج مرکب به ما می‌دهند، کندی محاسبات و هزینه نگه‌داری اطلاعات، رضایت‌بخش نیست. از سال ۱۹۷۵، که مورلت[2] (۱۹۳۱ تا ۲۰۰۷م.) در حین بررسی میزان ذخیره نفت یک معدن، پنجره‌های ثابت گابور را کارآمد نمی‌دید، به ابتکار خود دریچه گابور را وابسته به زمان کوچک و بزرگ کرد و نتایج رضایت‌بخش‌تری به دست آورد. وی نتایج معدن‌شناسی خود را با همکاری سه نفر دیگر در سال ۱۹۸۲م. منتشر ساخت [۱۵] که در آن‌ها از پنجره‌های متغیر صحبت کرده بود. او در سال‌های ۱۹۸۴ و ۱۹۸۵م. نیز با همکاری گراسمن، تابع‌های جدید را با الهام از اصطلاحی که در کارگاه به کار برده بود با نام موجک معرفی و مطالعه کرد [۱۶]،[۱۷].

از این پس بود که سیل کارهای عملی و نظری روی موجک‌ها به راه افتاد و مخصوصا دوبشی[3] (۱۹۸۸م.) نیز موجک‌هائی برای رفع نیازهای خود در رشته صوت درست کرد که مستقل از پنجره‌های فوریه بودند [۱۱]. تابع موجک که در عمل از حاصل ضرب یک

1. Paul Levy
2. Jean Morlet
3. Ingrid Daubechies

پنجره غیر ثابت در یک تابع هارمونی اختراع شد، در نهایت به صورت یک تابع کلی‌تر ψ به نام موجک مادر تعریف گردید که پنجره‌های متحرک از اتساع و انتقال آن حاصل شدند؛ یعنی

$$\psi_{s\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{x-\tau}{|s|}\right)$$

که در آن τ و s به ترتیب میزان‌های انتقال و اتساع پنجره را نمایش می‌دهند و ضریب پشت موجک هم برای یکه کردن آن است. معمولا انرژی موجک مادر را مساوی ۱ فرض می‌کنند و برای آن که پردازش برگشت‌پذیر باشد باید شرط موجکی خاصی هم که بعدا بیان می‌شود برقرار گردد. برای پردازش پیام f، آن را در موجک‌ها ضرب داخلی می‌کنیم؛ یعنی

$$\tilde{f}(s,\tau) = \langle f, \psi_{s\tau}\rangle.$$

(چون نماد $\hat{f}$ مخصوص سری یا تبدیل فوریه وضع شده است و بسیار اتفاق می‌افتد که هم‌زمان به تبدیل موجکی و یکی از دو تبدیل (گسسته یا پیوسته) فوریه نیاز پیدا کنیم، لذا تبدیل موجکی را با نماد $\tilde{f}$ نمایش می‌دهیم.) برای بازسازی پیام اولیه از پیام پردازش یافته، فرمول برگشتی زیر را به کار می‌بریم:

$$f(x) = \frac{1}{K}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(s,\tau)\,\psi_{s\tau}(x)\,\frac{ds d\tau}{s^2},$$

که در آن K و ψ باید در شرط موجکی زیر صدق کنند:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(u)|^2}{|u|}du < \infty.$$

موجکی که هم اکنون تعریف شد، به علت شباهتش به تبدیل فوریه، موجک پیوسته نامیده می‌شود و نظیر گسسته آن هم وجود دارد که از نظام آشکوبی دودوئی برخوردار است و انتقال‌ها و اتساع‌های مربوطه‌اش شمارا هستند؛ یعنی

$$\psi_{mn}(x) = \sqrt{2}^{m}\psi\left(\frac{x-n}{2^m}\right).$$

در حالت گسسته نیز با کارهائی مشابه سری‌های فوریه، پردازش و بازسازی یک پیام انجام می‌گیرد. امروزه این گونه پردازش‌ها را چه پیوسته و چه گسسته، به طور عام در مبحث قاب‌ها بررسی می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر در مورد موجک‌ها به [۲]، [۱۲] و مرجع‌های آن‌ها ارجاع می‌دهیم.

۸. آنالیز چندریزه‌سازی

هدف از آنالیز چندریزه‌سازی، یافتن زنجیره‌ای از زیر فضاهای بسته $\{V_j : j \ Z\}$ در $L^2(\mathbb{R})$ است به طوری که شرایط (نه لزوماً مستقل) زیر برقرار باشد:

$i.\ V_j \subset V_{j+1}; j \in \mathbb{Z};$
$ii.\ f(x) \in V_j \Rightarrow f(x + k2^{1-j}) \in V_j; k \in \mathbb{Z};\ j \in \mathbb{Z};$
$iii.\ f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1};\ j \in \mathbb{Z};$
$iv.\ \overline{\cup_{j\geq 0} V_j} = L^2(\mathbb{R}),$
$v.\ \cap_{j\geq 0} V_j = \{0\};$

vi یک تابع $\varphi \in V_0$ و عددهای مثبت A و B وجود دارند به طوری که برای هر $f(x) \in V_0$:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(x+k);$$
$$A||f||^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 \ \leq\ B||f||^2.$$

هرچه من تلاش کردم که استقلال یا عدم استقلال شرط پنجم را از پنج شرط دیگر به دست آورم، توفیقی به دست نیامد؛ ضمن این که مشتاق دریافت هر گونه اطلاعی در این مورد هستم این سوال را هم دارم که اصولا چه فایده‌ای بر این شرط مترتب است و اگر آن را حذف کنیم چه لطمه‌ای به نظریه وارد می‌آید. تابع φ را موجک پدر نام گذارده‌اند؛ اگر تابع $\tau \in V_0$ تصویرعمودی تابع $\varphi(2x) \in V_1$ باشد، آنگاه تابع

$$\psi = \varphi(2x) - \tau$$

با نام موجک مادر دارای این خاصیت است که انتقال‌های صحیحش فضای هیلبرت

$$V_0{}^{\perp} \cap V_1$$

را تولید می‌کنند و اتساع‌های مولد مزبور هم مولدی برای کل فضا هستند.

به راحتی می‌توان نشان داد که بر اساس پایه هار می‌توان یک آنالیز چندریزه‌سازی تولید کرد. برای این منظور V_j را زیر فضای تولید شده توسط $\cup_{0\leq k\leq j}\mathcal{B}_k$ تعریف می‌کنند و V_{-1} را همه توابع $f(\frac{x}{2})$ می‌گیرند که f در V_0 باشد؛ این کار را با استقراء روی عددهای صحیح منفی ادامه می‌دهند و هر V_j را از V_{j+1} به دست می‌آورند. پس از آن که نظریه موجک‌ها رونق گرفت، دوبشی [۲] در ۱۹۸۸م. موجکی پیوسته با دامنه تعریف فشرده مثال زد که انتقال‌ها و اتساع‌هایش طبیعت تابع‌های هار را داشتند و این مثال بود که مالات[1] [۱۸] و [۱۹] را به فکر ابداع آنالیز چندریزه‌سازی انداخت و مقالات سال ۱۹۸۹م. را انتشار داد.

1. Mallat

۹. سخن پایانی

مسلما مثال‌های بیشتری از ساختارهای آشکوبه‌ای در تقریبات می‌توان پیدا کرد ولی آوردن همه آن‌ها از حوصله یک مقاله عمومی خارج است؛ اما یادآور می‌شویم که گرچه در تعریف انتگرال لبگ، نظام آشکوبی دودوئی به کار گرفته می‌شود ولی در روال این مقاله نمی‌گنجد: آنچه در تقریب انتگرال لبگ در هر مرحله به دست می‌آید، عددی حقیقی (یا مختلط) است که هیچ اطلاعی از مراحل قبلی را در خود نگه نداشته است. (بجز در مورد تابع نامنفی، که نتیجه هر مرحله، بزرگتر یا مساوی نتیجه مرحله قبلی است.)

منابع

۱. رجبعلی پور، م.، کسرهای مصری. فرهنگ و اندیشه ریاضی. انجمن ریاضی ایران. سال ۲۸، شماره ۱، بهار ۱۳۸۸. صص ۳۸-۱.

2. Resnikoff, H.L. and Wells, Jr., R.O. Wavelet Analysis, *The Scalable Structure of Information*, Springer, New York, 1998

3. Daubechies, I., Orthonormal basis of compactly supported wavelets. Commun. *Pure Appl. Math.*,41(1988), 906-909.

4. Casazza, P.G., The art of frame theory, *Taiwanese Jour. of Math*, 4(2)(2000), 129-201.

5. Mallat, S.G., A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Patt. Anal. Mach. Intell.*, 11(7)(1989), 674-693.

6. Saliba, G., Al-Qushji's reform of the Ptolemaic Model for Mercury, *Arabic Sciences and Philosophy*, 3(1993) 161-203

7. Saliba, G., Flying Goats and Other Obsessions - A Response to Toby Huff›s Reply. Bulletin of the Royal Institute for Inter-Faith Studies, 4(2)(2002).

8. O'Connor, J.J., and Robertson, E.F., "Brook Taylor," MacTutor History of Mathematics, University of St. Andrews. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

9. O'Connor, J.J., and Robertson, E.F., "Colin Maclaurin," MacTutor History of Mathematics, University of St. Andrews. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

10. Fourier, J., (1822) *The analytical theory of heat.* (trans: Freeman A). Cambridge University Press, London, 1878.

11. Bhatia, R., Fourier Series, The Mathematical Association of America (Incorporated), 2005.

12. Gabor, D. Theory of communication. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*–Part III: Radio and Communication Engineering, 93(26)(1946), 429-457.

13. Haar, A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Mathematische Annalen* 69(3)(1910), 331-371. doi:10.1007/BF01456326.

14. O'Connor, J.J., and Robertson, E.F., "Paul Pierre Levy," MacTutor History of Mathematics, University of St. Andrews. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

15. Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E. and Giard, D., Wave propagation and sampling theory. *Geophys.*, 47(1982), 203-236.

16. Grossmann, A. and Morlet, J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math.*, 15(1984), 723-736.

17. Grossmann, A. and Morlet, J. Decomposition of functions into wavelets of constant shape and related transforms. In Streit, L. (ed), *Mathematics and physics, lectures on recent results*, World Scientific, River Edge, NJ, 1985.

18. Mallat, S.G., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of L^2 (R). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1989) , 69-87.

19. Mallat, S.G., A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Patt. Anal. Mach. Intell.*, 11(7)(1989) , 674-693.

۲۰. قلندری، ح. ماهیت فیزیکی افلاک: بررسی مفهوم فلک در آثار هیئت. *مجله تاریخ علم*. شماره ۱۰. سال ۱۳۹۰. صص ۱۰۸-۶۷.

۲۱. گمینی، امیر محمد. تعارضی میان فلسفه و نجوم در تمدن اسلامی. همایش بین المللی فلسفه اسلامی و چالش‌های جهان امروز. ۱۹ تا ۲۲ مهرماه ۱۳۸۸، تهران، ایران.