علوم پایه و کنترل آفات گیاهی: مدل ریاضی با الهام فیزیکی

محمود سوف باف سرجمعی
گروه گیاه پزشکی، پژوهشکده کشاورزی هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، کرج، ایران
msoufbaf@aeoi.org.ir
نامه علوم پایه شماره ۱۴، پاییز و زمستان ۱۴۰۳

چکیده

به عنوان شرحی مختصر از مقوله تعاملات زیبا و شگفت انگیز ریاضیات و زیست شناسی، مقاله حاضر با استفاده از دو گزیده دقیق از روش‌های بنیادین مدل سازی و آنالیز پایداری یک مدل نمونه از دو مقاله کلیدی در زمینه کاربرد مدل‌های ریاضیاتی در مدیریت تلفیقی حشرات آفت را جزییاتی بین رشته‌ای را تشریح می‌کند. در یک بخش به تبیین فرآیند ساخت یک مدل ریاضی از یک سیستم دینامیکی حشره آفت (میزبان)–پارازیتوئید (دشمن طبیعی) بر اساس روابط علّی موجود بین متغیرهای مختلف مستقل و وابسته پرداخته، در بخش دیگر یک مثال عینی در این خصوص ارائه می‌دهد. هدف اصلی این مقاله، بیان حتی المقدور مختصر و مفید این رویکرد علمی بین رشته‌ای ریاضیات–زیست شناسی به زبانی ساده و قابل استفاده برای کلیه علاقه‌مندان به این حوزه است.

کلیدواژگان: پارازیتوئید، دینامیک جمعیت، مدل ریاضی، مدیریت تلفیقی، نقطه تعادل

۱. مقدمه

تاکنون مدل ریاضی جامع و کاملی که در مطالعه تغییرات در فراوانی جمعیت طبیعی یک حشره به طور رضایت بخش قابل اتکا باشد توسعه نیافته است. دلیل اصلی این حقیقت در فراوانی فاکتورهای موثر در دینامیک جمعیت‌ها و نیز ارتباطات این فاکتورها با هم است که به اثرات کاهش یافته یا تشدید یافته آن‌ها بر تغییرات جمعیت حشرات در فضا و زمان منجر می‌گردد و طبیعتا تشخیص مهم‌ترین فاکتورها و یا بحرانی‌ترین ترکیبات آن‌ها و لحاظ آن‌ها در مدل‌های جمعیتی کاری نشدنی است؛ چه اگر شدنی نیز باشد، اصل اساسی مدل‌سازی ریاضی که ساده‌سازی[1] است نقض می‌شود و مدلی خواهیم داشت که تجزیه و تحلیل آن هزینه بالایی دارد. همچنین، فاکتورهای مذکور به طور پیوسته در حال تغییر بوده، از مسیرهای علّی[2] مستقیم و غیرمستقیم متنوعی بر جمعیت حشرات اثر می‌گذارند. به عنوان یک نمونه ساده و البته ساده‌انگارانه از برهمکنش‌های پیچیده حاکم بر سیستم‌های دینامیکی با محوریت حشرات آفت می‌توان به اثر یک حشره‌کش (کاهش تراکم میزبان) که خود متاثر از دماست اشاره نمود. در این رویکرد، تراکم میزبان و تراکم پارازیتوئید هماهنگ با دما، نرخ پارازیتیسم را تنظیم می‌کند. بنابراین غلظت حشره‌کش، تراکم میزبان و تراکم پارازیتوئید همگی در برهمکنش با هم در کنترل بقای[3] یک حشره آفت نقش دارند. از دیدگاه ضرورت اتکال به مدل‌های ریاضیاتی در کنترل حشرات آفت، ذکر این نکته کافی است که ارزیابی راهکارها در ابعاد وسیعِ اکوسیستم‌های کشاورزی و یا طبیعی همچون جنگل‌ها و غیره به صورت تجربی غیرعاقلانه و هزینه خطاها (محاسباتی و عملیاتی) و جبران آن‌ها خارج از توان هر نهادی می‌باشد و لذا لازم است تا با ابزار مدل‌سازی از نتایج اتخاذ آن روش‌ها در ابعاد بزرگ پیش از اقدام عملی آگاهی حاصل نمود. علی‌رغم پیچیدگی و سختی قابل ملاحظه در استحصال جواب تحلیلی معادلات ریاضی مورد استفاده در دینامیک جمعیت حشرات، حل عددی این معادلات و نیز شبیه‌سازی کامپیوتری رویدادهای مرتبط به طور مستقیم، فارغ از پیچیدگی‌های ریاضی و زیست‌شناسی مرتبط، به دلیل پیشرفت قابل توجه آنالیز عددی در افزایش سرعت و کاهش حجم محاسبات در کامپیوتر، رویکردی عملیاتی، قابل استناد و استفاده در مطالعات و تصمیم سازی‌های مختلف این حوزه می‌باشد.

در مقاله حاضر با بهره‌گیری از مطالب دو مقاله کلیدی در زمینه ساخت مدل‌های ریاضی (وات[4] ۱۹۶۱) و به کارگیری آن‌ها در کنترل حشرات آفت (تانگ و چک[5] ۲۰۰۸)، پس از بیان ساده اصول و راهکارهای ساخت مدل ریاضی برای یک پدیده دینامیکی در دنیای حشرات، یک مثال از کاربرد این مدل‌ها در مدیریت تلفیقی حشرات آفت ارائه می‌شود. هدف اصلی، بیان این رویکرد علمی بین رشته‌ای ریاضیات–زیست شناسی به زبانی ساده و قابل استفاده برای کلیه علاقه مندان به این حوزه –با نشان دادن امکان بهره‌گیری‌های مشابه– در حوزه وسیعی از پژوهش‌های زیست شناختی و غیره است.

1. Simplification
2. Causal path
3. Survival
4. Watt
5. Tang and Cheke

۲- بخش اول، ساخت و توسعه مدل

در این بخش گزیده‌ای از مقاله وات (۱۹۶۱) برای تبیین روند ساخت مدل ریاضی برای توصیف یک پدیده زیستی در دنیای حشرات آفت ارائه می‌شود. به دلیل محتوای نزدیک به آموزشی مقاله مذکور و نیز برای جلوگیری از بروز انحراف در بازنویسی روش‌های بیان شده در آن مقاله در اکثر موارد از ترجمه دقیق جملات استفاده شده، در موارد لازم برای تشریح، توضیحات ضروری در خودِ متن و یا به صورت زیرنویس اضافه شده است.

۲-۱- *ضرورت استفاده از مدل‌های ریاضی در دینامیک جمعیت*

ساخت و توسعه مدل‌های ریاضی برای دینامیک جمعیت حشرات آفت، به ویژه از منظر استفاده از ابزارهای پردازش گران‌قیمت همچون سوپرکامپیوترها، یک فرآیند هزینه بر است. اولین استفاده مورد انتظار از یک مدل ریاضی توسعه یافته در این کاربرد، استحصال بهترین روش ممکن برای کنترل جمعیت آفت است. چنانچه بقای یک حشره آفت تنها به یک فاکتور وابسته باشد، می‌توان نسبت زنده مانده‌ها را به مقادیر نسبی آن فاکتور در یک نمودار نشان داد و مقداری از آن فاکتور که بقا را به حداقل می‌رساند را به طور مستقیم و یا با روش‌های مختلف درون‌یابی[۱] به دست آورد. با این حال، وقتی بقا متاثر از چندین فاکتور می‌باشد روش گرافیکی به تنهایی جوابگو نبوده، لذا روش‌های پیشرفته‌تر ریاضی برای درک چگونگی کاهش بقا به کار گرفته می‌شود. هر اندازه مساله کنترل جمعیت پیچیده‌تر باشد، استفاده از مدل‌های ریاضی برای رسیدن به بهترین روش کنترلی ضروری‌تر است. به عنوان مثال با افزایش تجمعی مقاومت به حشره‌کش‌ها استفاده متوازنی از حشره‌کش-عامل بیوکنترل[۲] و احتمالا در تلفیق با روش‌های کنترل زراعی ضروری است و لذا نسخه نهایی تصمیمات مدیریتی تنها به اتکال به دستورالعمل‌های موردی و بدون توسل به مدل‌های کارآمد به دست نمی‌آید. یک مدل در پیوند با تجزیه واریانس برای تعیین فاکتورهای تنظیم‌کننده جمعیت آفت به کار می‌رود و از این طریق، عواملی که ارزش مطالعه بیشتری دارند مشخص می‌گردد. همچنین یک مدل در تشخیص مهم‌ترین مشخصه یک فاکتور و نیز تعیین درجه اهمیت آن به عنوان یک عامل تنظیم کننده به کار می‌آید. ابتدا یک مدل مفهومی[۳] برای بیان اثر یک فاکتور یا فاکتورهای خاص تهیه می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های آماری مناسب، مقادیر پارامترها را برای همه حالات به دست آورده، نهایتا مقادیر پارامترها به متغیرهای زیستی مرتبط قابل اندازه‌گیری ارتباط داده می‌شوند. حال با دانستن متغیری که مقدار موثر بودن فاکتور را تنظیم می‌کند موثرترین نسخه از فاکتور تعیین می‌شود.

فرهنگ واژگان

پارازیتوئید: حشراتی که رفتار شبیه پارازیتیسم دارند را پارازیتوئید یا شبه پارازیت گویند. دلیل اصلی این نامگذاری عدم تطابق کامل این رفتار و نیز جثه حشرات با رفتار و جثه پارازیت‌ها می‌باشد.

دینامیک جمعیت: تغییرات جمعیت روی تغییرات متغیر(های) مستقل زمانی/ فضایی.

مدل ریاضی: قانون حاکم بر پدیده زیستی به زبان ریاضی که با تجزیه و تحلیل آن به سوالات مرتبط به صورت عددی و یا تحلیلی پاسخ داده می‌شود. رایج‌ترین این قوانین به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی فرمول‌بندی می‌شوند. در معادلات دیفرانسیل معمولی متغیر وابسته تنها به یک متغیر مستقل که عمدتا زمان در نظر گرفته می‌شود و مشتقات آن وابسته است. ولی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابستگی مذکور به دو یا تعداد بیشتری از متغیرهای مستقل و مشتقات آن‌ها است. به عنوان مثال در موجودات خونسرد همچون حشرات، علاوه بر زمان، دما نیز به عنوان یک متغیر مستقل ناگزیر دیگر در نظرگرفته می‌شود.

مدیریت تلفیقی: اعمال مجموعه‌ای از راهکارها و ابزار مورد استفاده در کنترل جمعیت حشرات آفت و کاهش آن به زیر سطح زیان اقتصادی.

نقطه تعادل (agent Biocontrol): نقطه تعادل[۴] در یک دستگاه دینامیکی زمان پیوسته معادل نقطه ثابت[5] (Mechanistic) در دستگاه‌های دینامیکی زمان گسسته و عبارت است از مختصاتی که در آن متغیرهای دستگاه رشد و حضیضی ندارند و رفتار دستگاه خطی سازی شده حول آن نقاط پایدار، ناپایدار و یا نوسانی می‌باشد. دینامیک نوسانی خود می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد.

به‌عنوان مثال، چنانچه مشخص گردد که یک کارایی جستجوگری[۶] ثابت در یک معادله شکار، اندازه نسبی یک ارگان مرتبط با شکارگری در گونه‌های شکارگر می‌باشد (مثلا آرواره بزرگتر یا کوچکتر در شکارگرها یا تخم ریز بلندتر یا کوتاه تر در پارازیتوئیدها)، معادله شکار فقط بر اساس صفات و رفتارهای گونه‌ای که اندازه نسبی مناسبی دارد ساخت می‌یابد. به عنوان مثالی دیگر در خصوص میزان سمیت یک حشره‌کش، چنانچه دلیل سمیت بیشتر یک آنالوگ[۷] نسبت به بقیه معلوم نباشد، انجام آزمون و خطا برای یافتن بهترین آنالوگ یک رویه علمی نیست؛ اما چنانچه رابطه بین ساختار مولکولی حشره‌کش و سمیت معلوم باشد، به راحتی می‌توان آنالوگ‌های سمی‌تر را شناسایی کرد (ریم اشنایدر[۸] ۱۹۵۴ به نقل از وات ۱۹۶۱). یک مدل ریاضی با مشخص کردن متغیرهایی که لازم است اندازه‌گیری شوند و اینکه چگونه، کی و کجا اندازه‌گیری شوند، موضوعات مورد تحقیق را روشن می‌سازد. نهایتا همانند آنچه در فیزیک رخ داده است، یکی از مهم‌ترین نتایج به کارگیری مدل‌ها حصول نتایج منطقی و در عین حال جالب می‌باشد. برای مثال ظرفیت قابل تحمل محیط[۹] یک حشره آفت در یک محیط باز بر خلاف انتظار تابعی از محیط نمی‌باشد بلکه نتیجه رقابت درون

۱. Interpolation که شامل یافتن یک تابع درونیاب بر اساس یک سری محاسبات روی یک مجموعه داده تجربی می‌باشد.
2. agent Biocontrol
3. Mechanistic
4. Equilibrium
5. Fixed point
6. Searching efficiency
۷. Analog یا یک نسخه مولکولی دیگر از ماده شیمیایی
8. Riemschneyder
9.Carrying capacity

گونه‌ای[1] حشره مورد مطالعه در آن محیط است.

۲-۲- ساخت مدل

یک حشره تک نسلی[2] را در نظر بگیرید. از نمادهای زیر برای تعاریف مرتبط استفاده می‌شود.

N_t تراکم حشرات بالغ (تعداد در واحد سطح) موجود قبل از تخم‌ریزی در سال t

N_{t+1} تراکم حشرات بالغ در زمان متناظر در سال t+1

$T_{t:t+1}$ شاخص روند جمعیت حشره آفت سال جاری نسبت به سال گذشته

X_t مقدار متغیر برای فاکتور i ام تنظیم کننده تعداد حشرات در طی فاصله زمانی t تا t+1

P_t نسبتی از N_t که ماده‌اند و در زمان t تخم‌گذاری می‌کنند

F_t میانگین باروری در زمان t

S_E نسبتی از تخم‌ها که تا زمان تفریخ زنده می‌مانند (بقای تخم)

$S_I \ldots S_{VI}$ بقای سنین ۱ تا ۶ لاروی[3]

S_P بقای شفیره[4]

S_A بقای حشرات بالغ تا و نیز شامل زمان تخم‌گذاری در سال t+1

با داشتن این اطلاعات تابع ۱ تحلیل می‌شود. فرم شناخته شده تحول زمان-گسسته جمعیت حشرات به صورت کلی زیر نشان داده می‌شود.

$$T_{t:t+1} = \frac{N_{t+1}}{N_t} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (1)$$

از n متغیر مستقل موجود در تعریف تابع ۱ فقط تعدادی قابل کنترل توسط انسان هستند و سایرین از قبیل فاکتورهای مرتبط با آب و هوا در این معادله قابل دست‌ورزی و کنترل نیستند. هیچ گونه اولویت بندی بین متغیرهای مستقل قائل نشده و تابع قابل شکستن به چند تابع مستقل از هم نیست. مساله مهم از منظر کنترل حشرات آفت این است که با در نظر گرفتن آرایه‌ای از مقادیر متغیر از زیرمجموعه‌ای از X_iها که توسط انسان قابل کنترل نیستند (از قبیل آب و هوا)، برای سایر X_iها چه مقادیری بهتر است انتخاب گردد تا بتوان جمعیت را کنترل نمود؟ برای مثال کدام روش‌های کنترل بیولوژیک، سموم شیمیایی و ... و با چه اندازه‌ای بایستی به کار رود تا هدف کنترل محقق گردد؟ به زبان ریاضی، معادله ۱ مختصات جمعیت را به عنوان یک نقطه در یک فضای n بعدی نشان می‌دهد که توسط شرایط آب و هوایی و سایر فاکتورها مشخص می‌شود. با لحاظ این مشخصات چگونه می‌توان $T_{t:t+1}$ را کاهش داد؟ برای پاسخ به این سوال می‌ایست فرم تابع ۱ را تا حد امکان توسعه داد. اولین قدم از نگاه زیست شناسی این است که معادله ۱ با زمان فنولوژیک[5] ساختاربندی شود زیرا اثر هر فاکتور بر یک جمعیت به زمان اثر آن فاکتور از دیدگاه آنتوژنی[6] کلیه افراد در جمعیت بستگی دارد. برای مثال بادهای سهمگین چنانچه در یک مرحله خاص از نشو و نمای فردی برخی از گونه‌های حشرات آفت جنگل رخ دهند به طور قطعی مهم هستند. به عنوان نمونه، زمانی که لاروهای خیلی کوچک یک پروانه برگ‌خوار با آویزان شدن از انتهای تار ابریشمی خود جابجا می‌شوند اطلاعات زمانی مفیدتری محسوب می‌شود تا اینکه تنها بدانیم این بادها در دو هفته آخر بهار می‌وزند و یا به عنوان مثالی دیگر، زمان تفریخ تخم در مطالعه شکارگرها و پارازیتوئیدهای تخم نسبت به زمان تقویمی ارجح هستند. بنابراین لازم است تابع ۱ به فرم ۲ بازنویسی شود.

$$T_{t:t+1} = P_t\, F_t\, S_E\, S_I \ldots S_{VI}\, S_P\, S_A \qquad (2)$$

این شکل از تابع را مدل نامیده و هر جمله از معادله ۲ به صورت تابعی به عنوان یک زیر-مدل تعریف می‌شود (تابع ۳).

$$S_E = f_E\,(X_1^E, X_2^E, \ldots, X_3^E) \qquad (3)$$

که در آن F_E تابع بقای تخم بوده و X_{IE}ها مقادیر متغیر برای هریک از فاکتورهای مستقلی است که در مرحله تخم باعث مرگ و میر حشره می‌شوند. به همین ترتیب معادله ۳ را نیز می‌توان به توابع کوچک‌تری شکست که عمل فاکتورهای تنظیم کننده جزئی‌تری را در هر مرحله زیستی حشره توصیف کنند. هر یک از این جملات می‌تواند شامل بیش از یک متغیر باشد، زیرا به عنوان مثال تعداد لاروهای مورد حمله یک پارازیتوئید توسط عمل همزمان و برهم کنش فاکتورهایی چون دما، رطوبت، تراکم میزبان و تراکم خود پارازیتوئید تنظیم می‌شود. در ادامه برای ساختاربندی زیر-مدل‌ها و

1. Intraspecific

۲. حشره‌ای که در یک سال یک نسل تولید می‌کند و در منابع اغلب با monovoltine یا univoltine یاد می‌شود.

۳. به اولین مرحله نابالغ بعد از تخم در حشرات با دگردیسی کامل، لارو Larva گویند که عمدتا به صورت کرمی شکل ولی با مرفولوژی‌ها و نیز رفتارهای متنوع در راسته‌های مختلف حشرات می‌باشد.

۴. آخرین مرحله تکامل فردی نابالغ در حشرات با دگردیسی کامل را شفیره Pupa گویند که قبل از ظهور حشرات کامل می‌باشد و عمدتا در داخل یک پوسته سخت از جنس کیتین می‌باشد. در این دوره، ابتدا بافت‌های دوره لاروی تجزیه (هیستولیز) و سپس بافت‌های حشره بالغ ساخته می‌شود (هیستوژنز).

5. Phenologic

۶. Ontogeny به مفهوم نشو و نمای یک حشره از تخم تا بلوغ و با عبور از کلیه مراحل زیستی می‌باشد. کامل‌ترین سیکل زیستی در حشرات با دگردیسی یا متامورفوزیس کامل شامل تخم، لارو (با سنین مختلف لاروی یا اینستارها)، شفیره و حشره کامل می‌باشد که عمدتا در حشرات متعلق به راسته‌های پیشرفته از قبیل بال‌پولک‌داران (پروانه‌ها و شب‌پره‌ها)، بال‌غشائیان (زنبورها)، دوبالان (مگس‌ها و پشه‌ها) و قاب بالان (سوسک‌ها) مشاهده می‌شود. سیکل‌های زیستی ساده‌تری نیز در بین راسته‌های مختلف حشرات مشاهده می‌شود.

یا زیر–زیر– مدل‌ها اقدام به جمع آوری داده‌های مربوط به جمعیت حشره و متغیرهای مستقل مختلف از قبیل داده‌های آب و هوایی می‌شود. در این رابطه تخمین جمعیت حشرات آفت و عوامل بیوکنترل طبق روش‌های موجود در منابع انجام می‌شود. در این مرحله توجه به جزئیات اکولوژیک، فیزیولوژیک و رفتاری گونه‌های مورد مطالعه از اهمیت بالایی برخوردار است. به عنوان مثال نرخ مصرف[1] هر مرحله زیستی از شکارگرها مهم است و بایستی به صورت جداگانه ثبت شود. پوره و بالغین سن‌های شکارگر عموما نرخ مصرف متفاوتی دارند که در عمل شکارگری نهایی هرکدام به شکلی متفاوت ظاهر خواهند شد. نهایتا داده‌های به دست آمده از این رویه را می‌توان به روش‌های متنوع تجزیه رگرسیونی خطی و چندگانه به صورت مدل‌های پیشگو تبدیل کرد. ایراد اساسی این مدل‌ها غفلت از متغیرهای غیرخطی است که در پدیده‌های زیستی حشرات غالب است ولی به هر حال رگرسیون‌های چندگانه به عنوان راهنمایی ارزنده در کارهای مقدماتی برای ساخت یک مدل تحلیلی همچنان مورد توجه هستند. همچنین مدل‌های استنتاجی، مدل‌هایی قابل حصول از طریق درون‌یابی و یا برون‌یابی از مجموعه داده‌های به دست آمده در آزمایشگاه هستند که موضوع انتگرال‌گیری عددی است که روش‌های مذکور در منابع مربوطه به تفصیل در دسترس‌اند. پس از استحصال توابع درون‌یاب، می‌توان از آن‌ها به عنوان توابع پیشگو برای سایر نقاط داده‌ای دلخواه استفاده کرد.

ساخت یک مدل استقرایی–استنتاجی برای توصیف یک پدیده پیچیده موضوعی کاملا متفاوت از محاسبه یک معادله رگرسیونی است. در این جا تلاش بر این است تا معادله‌ای ساخته شود که تعداد کمی از فاکتورهای تنظیم کننده را به مرگ و میر ناشی از خودشان ارتباط دهد. ابتدا مجموعه‌ای از فرضیات در خصوص اثر فاکتورهای مختلف بر بقا، باروری و نسبت جنسی آفت تشکیل شده، سپس این فرضیات به صورت مجموعه‌ای از معادلات – عموما معادلات دیفرانسیل معمولی[2] ODE و یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[3] PDE – بیان می‌شوند. نهایتا این معادلات انتگرال گیری و حل شده و مجموعه‌ای از جواب‌ها حاصل می‌گردد. یکی از معروف ترین مجموعه‌های استقرایی–استنتاجی، دستگاه معادلات معرفی شده توسط ولترا[4] در سال ۱۹۲۶ می‌باشد. ضعف ذاتی چنین مدل‌هایی اهمیت ندادن به منطق منتج به استنتاج‌ها می‌باشد و لذا نتایج نهایی از فرضیات پایه‌ای اتخاذ شده درست‌تر نمی‌باشند. به بیان بهتر، مدل‌سازی رویه‌ای مفید خواهد بود اگر بر اساس فرضیات استقرایی تایید شده از لحاظ زیستی بنا شده باشد. بنابراین روش بهینه ساخت یک زیر–زیر–مدل، شروع کردن با یک حدس در خصوص یک مسیر علی بر مبنای مناسبات زیستی، آزمون این حدس یا فرضیه و خالص سازی فرضیه بر اساس نتایج آزمون خواهد بود. در واقع از استقرا برای تعیین بهترین فرضیات و از استنتاج برای جستجوی کاربردهای غیرمستقیم فرضیات استفاده می‌شود و لذا این رویه از ساخت مدل را استقرایی–استنتاجی می‌نامند. این چرخه (فرضیه سازی–آزمون فرضیه–خالص سازی فرضیه) تا حصول یک قانون علمی حاکم بر یک زیر–زیر–مدل ادامه می‌یابد و در نهایت موفقیت اصلی زمانی حاصل می‌شود که یک زیر–مدلی به دست آید که نحوه ترکیب مرگ و میرهای جزئی مشاهده شده را برای رسیدن به مرگ و میر کلی حقیقی مشاهده شده به بهترین وجه توصیف کند. مرگ و میرهای جزئی مربوط به هر فاکتور از قبیل پارازیتیسم و شکارگری، سموم شیمیایی و... با روش‌های مرسوم حشره شناسی در آزمایشگاه و صحرا قابل اندازه‌گیری‌اند. به هر حال جداسازی مرگ و میرهای مرتبط به هر فاکتور، به ویژه شکارگری، از مرگ و میرهای سایر فاکتورها امری حساس و نیاز به طراحی دقیقی از آزمایشات دارد. استفاده از جداول زندگی در تعیین فاکتورهای موثر برکاهش بقای حشرات و مقایسه آن‌ها برای تعیین فاکتورهای کلیدی مرگ و میر یک رویه کارآمد و مفید است. در این روش مرگ و میر ناشی از عوامل مختلف زنده (عوامل مختلف بیوکنترل، مقاومت گیاه میزبان و ...) و غیرزنده (استرس‌های فیزیکی محیطی و ...) در هر مرحله از زیست حشره آفت مورد مطالعه و آماربرداری (نسبت زنده مانده‌ها و محاسبه بقا) قرار گرفته، پس از تشکیل جداول زندگی با استفاده از معادلات دموگرافی شاخصه‌های مختلف رشد جمعیت و به تبع آن نقش هر عامل کنترلی در تنظیم جمعیت حشره آفت مشخص می‌شوند (کری[5] ۲۰۰۱).

مدل‌سازی با رسم نمودار مرگ و میرهای جزئی مربوطه به هر فاکتور در مقابل مقادیر آن فاکتور آغاز می‌شود. سپس استنباط قانون حاکم بر این روابط بر اساس دانش ریاضی از توابع مقدماتی[6] و ترکیبات مختلف آن‌ها و نیز اصول حاکم بر تشکیل منحنی‌ها، سطوح و احجام در فضاهای متناظر به دست خواهد آمد. سپس دامنه کار به معادلات خاصی محدود و شکل معادله طی یک رویه منطقی منظم مشخص می‌شود. همانند کلید شناسایی گونه‌های حشرات، می‌توان از کلید زیر برای حدس بهترین معادلات ریاضی توصیف کننده برای یک پدیده استفاده کرد.

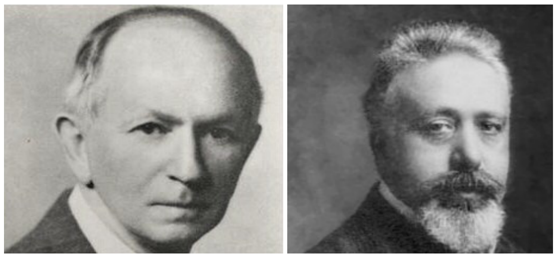
1. Consumption rate
2. Ordinary Differential Equations
3. Partial Differential Equations
4. Volterra
5. Carey
۶. توابع مقدماتی شامل توابع ثابت، چندجمله‌ای، مثلثاتی، معکوس مثلثاتی، کسری، رادیکالی، توانی، نمایی، لگاریتمی و قدرمطلق است.

۱	متغیر Y حداقل در ابتدای امر می‌تواند به عنوان تابعی از تنها یک متغیر دیگر باشد	ODE
۲	متغیر Y به وضوح تابعی از دو یا بیشتر از متغیرهای مستقل دیگر باشد	PDE
۳	لحاظ مشتق دوم در معادله پایه ضروری نیست	DE of 1st Order
۴	لحاظ مشتقات مرتبه n در معادله پایه ضروری است	DE of nth Order
5	توان‌های مشتق برای توصیف پدیده ضروری نیست	DE of degree 1
6	توان‌های nام مشتق برای توصیف پدیده ضروری است	DE of degree n

معادلات معرفی شده در کلید بالا دسته بزرگی از معادلات را نشان می‌دهند که در توصیف پدیده‌های زیستی بیشترین مورد استفاده را داشته‌اند. برای آشنایی با انواع معادلات دیفرانسیل، خواننده می‌تواند به کتاب‌های حسابان پیشرفته و یا معادلات دیفرانسیل مراجعه کند. از میان معادلات اشاره شده در بالا، پرکاربردترین در مطالعات زیستی، ODE مرتبه اول با درجه ۱ است که به فرم معادله ۴ یا فرم کامل نمایش داده می‌شود.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (4)$$

گاه معادلات دیفرانسیل خطی در اکولوژی نظری به عنوان اساس مطالعه پدیده‌های معینی همچون رقابت و شکارگری مکررا به کار گرفته شده‌اند. نمونه بارز آن، کار مستقل لوتکا[1] ۱۹۲۵ و ولترا ۱۹۲۶ در ساختاربندی مدل راهبردی معروف به لوتکا-ولترا است.



شکل ۱- آلفرد جیمز لوتکا، سمت چپ، زیست-ریاضیدان و زیست-آماردان لهستانی-آمریکایی و ویتو ولترا، سمت راست، ریاضیدان و فیزیکدان ایتالیایی. این دو دانشمند در پی به کارگیری اصول علوم فیزیکی در علوم زیستی موفق به ارائه مدل راهبردی معروف لوتکا-ولترا به صورت مستقل از هم به ترتیب در سال‌های ۱۹۲۵ و ۱۹۲۶ میلادی گردیدند. لوتکا کار روی این معادلات را ابتدا در سال ۱۹۱۰ آغاز نمود. در سال ۱۹۲۰، مدل خود را به سیستم‌های ارگانیک توسعه داده و در سال ۱۹۲۵ از این مدل برای آنالیز برهمکنش‌های شکار-شکارچی در کتاب خود با عنوان Biomathematics استفاده نمود. همان مجموعه معادلات در سال ۱۹۲۶ توسط ولترا منتشر شد که با الهام از یک زیست شناس دریا به سیستم‌های زیستی توسعه داده شده بود. این دو معادله شامل

$$\frac{dx}{dt} = \alpha X - \beta XY$$

$$\frac{dY}{dt} = \delta XY - \gamma Y$$

است که در آن X و Y به ترتیب جمعیت شکار و شکارگر بوده و پارامترهای α معادل نرخ رشد شکار، β نرخ شکارگری شکارگر (نرخ کشتن و خوردن شکار)، δ نرخ افزایش جمعیت شکارگر با مصرف شکار و γ نرخ مرگ و میر شکارگر است.

به طرق مختلفی می‌توان ساخت یک زیر-زیر-مدل را آغاز کرد. فرض نمایید یک متغیر وابسته Y تحت تاثیر فاکتور X_1 و نحوه تاثیر این فاکتور متاثر از تغییرات اعمالی در Y بوسیله فاکتورهای X_2 و X_3 باشد. به عبارت دیگر $f(X_1,X_2,X_3)$. حال برای ساخت یک معادله دیفرانسیل از اثر X_1، X_2 و X_3 بر Y، اولین مساله، تصمیم گیری در خصوص این است که کار با کدام نسخه از معادلات زیر آغاز شود (وات ۱۹۶۰):

$$\frac{dY}{dX_1} = f(X_1,X_2,X_3)$$

$$\frac{dY}{dX_2} = f(X_1,X_2,X_3)$$

$$\frac{dY}{dX_3} = f(X_1,X_2,X_3)$$

اغلب تصمیم گیری در این خصوص از ابتدا واضح است. چنانچه متغیری که Y در ابتدا نسبت به آن مشتق پذیر است متغیری باشد که نهایتا در معادله انتگرال وارد می‌شود، انتگرال گیری از عبارت منتج نهایی آسان‌تر خواهد بود. پس از انتخاب یکی از فرم‌های فوق، برای مثال dY/dX_2، می‌توان اثرات X_2 بر Y را از مسیرهای علی (سببی) مختلف بررسی کرد. برای مثال تراکم جمعیت از مسیرهای گوناگونی همچون احتمال جفت‌یابی، رقابت برای محل‌های تخم گذاری و دیگر اشکال رقابت بر باروری یک گونه اثر می‌گذارد. برای مثال، ۴ مسیر علی A، B، C و D برای یک پدیده متصور است. روشن است که

$$\frac{dY}{dX_2} = f(X_1,X_2,X_3) = f(A,B,C,D)$$

$$A = f_A(X_1,X_2,X_3)$$
$$B = f_B(X_1,X_2,X_3)$$
$$C = f_C(X_1,X_2,X_3)$$
$$D = f_D(X_1,X_2,X_3)$$

ترکیبات مختلف این مسیرهای چهارگانه (جمع، ضرب و...) بستگی به درک دقیق رویداد زیستی مورد مطالعه داشته و از قوانین احتمالات تبعیت می کند. به عنوان مثال احتمال رخ دادن دو رویداد تصادفی مستقل از هم مساوی حاصل ضرب احتمالات تک تک رویدادهاست. برای اتخاذ فرم صحیح معادلات برای اثر هرکدام از متغیرها بر Y ضروری است تا نمودار حاصل از رسم بقای Y در مقابل هر فاکتور به دقت بررسی شود. در این راستا، پاسخ به پنج

1. Lotka

نمونه سوال زیر می‌تواند به انتخاب بالغ بر ۳۰ نوع از معادلات عملگر رهنمون باشد.

۱- آیا dY/dX متناسب با X است؟

۲- آیا dY/dX متناسب با X است؟

۳- آیا dY/dX به طور عکس متناسب با X است؟

۴- آیا dY/dX به صفر میل می‌کند هر گاه X به یک مجانب فوقانی $Y\text{-max}$ میل کند؟

۵- آیا dY/dX به بی نهایت میل می‌کند هر گاه X به یک مجانب زیرین $X\text{-min}$ میل کند؟

با پاسخ به سوالات فوق، از چپ به راست در دیاگرام درختی زیر (جدول ۱)، می‌توان به شکل اولیه مناسبی از معادله حاکم بر سیستم مورد مطالعه دست یافت. معادله ۳۲ که ساده‌ترین در این دیاگرام می باشد پس از انتگرال‌گیری به فرم $Y=a+bX$ که یک خط راست است در می‌آید. انتگرال‌گیری از سایر معادلات این دیاگرام نیز با مراجعه به کتب مرجع به سادگی قابل انجام است. به عنوان مثال فرم انتگرال معادله ۳۰ به صورت $Y=Ymax\ (1+e^{-bX})$ یکی از راه‌های نوشتن معادله توسط گاوس[1] در دهه ۴۰ میلادی برای توصیف حمله پارازیت‌ها و شکارگرها می‌باشد (گاوس ۱۹۳۴ به نقل از وات ۱۹۶۱).

پس از تعیین معادله توصیف کننده پدیده زیستی، از آن انتگرال گیری به عمل آمده تا به فرم مناسب برای آزمون زیستی در آید. ادامه مسیر در ارزیابی مدل به میزان پیچیدگی مدل بستگی دارد. آزمون گرافیکیِ درستی فرضیات با استفاده از هر یک از مدل ها، مثلا معادله ۳۰، با بررسی اثر X_1 بر A زمانی که X_2 و X_3 ثابت فرض شوند به شرح زیر است. با لحاظ

$$\frac{d_Y}{dx_1} = b(Amax\text{-}A)$$

$$\text{-In}(Amax\text{-}A) = bX_1\text{-In}(Amax)$$

و از آنجا که یک bی ثابت مورد نظر است، رابطه بالا به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\text{In}\left(\frac{Amax}{Amax\text{-}A}\right) = bX_1 \qquad (5)$$

چنانچه معادله ۳۰ به درستی ارتباط بین A و X_1 را با لحاظ X_2 و X_3 ثابت توصیف نموده باشد، رسم نمودار معادله ۵ (رسم A در مقابل X_1) منجر به یک خط راست خواهد شد. در غیر این صورت و با عدم حصول خط راست، لازم است معادله اولیه دیگری غیر از معادله ۳۰ را آزمود. چنانچه آزمون خط راست موفق بود مرحله بعد که شامل تست جواب متغیرهای ثابت انگاشته شده X_2 و X_3 می‌باشد انجام می‌شود. از معادله ۵ به دست می‌آید:

$$\frac{\text{In}\left(\frac{Amax}{Amax\text{-}A}\right)}{X_2} = b\,(\equiv Z)$$

چنانچه معادله ۳۰ به عنوان یک زیر-زیر-مدل برای توصیف اثر فاکتور X_1 روی A کفایت نماید، لازم است نمودار مقادیر Z در مقابل X_2 به صورت یک خط ثابت باشد. چنانچه در زمان رسم نمودار Z مقابل X_2 یک خط راست موازی محور X_2 به دست نیاید نتیجه می‌شود که معادله ۳۰ به تنهایی برای توصیف اثر X_1 بر A کافی نیست زیرا X_2 اثر مزبور را تغییر داده است. در این مرحله لازم است یک جمله که بیانگر اثر X_2 می‌باشد به درستی (از جنبه زیستی و ریاضیاتی) به معادله ۳۰ وارد شود. این فرآیند تکرار می‌شود تا رابطه A با X_1 به دست آید، بدین مفهوم که یک معادله بر اساس آزمون نمودار زیر انتخاب شود.

$$\frac{\text{In}\left(\frac{Amax}{Amax\text{-}A}\right)}{X_2} = f(X_2)$$

مجددا یک نگاشت مناسب انتخاب می‌شود تا فرم معادله انتخاب شده، مورد آزمون قرار گیرد. برای مثال چنانچه نگاشت زیر انتخاب شده باشد:

$$\frac{dz}{dx_2} = \frac{bz}{X_2}$$

فرآیند فوق جهت آزمون معادله پیشنهادی (فرضیه جدید) تا زمان حصول یک معادله مناسب تکرار می‌شود. زمانی که معادلات مربوط به مسیرهای A ،B ،C و D به دست آمد، یک تخمین نهایی از مقادیر پارامترها انجام می‌شود و زیر-زیر-مدل، با یک آزمون آماری مناسب سنجیده می‌شود. مهمترین مساله در اینجا سختی برازش داده‌های تجربی به مدل‌های پیچیده ریاضی است. به وضوح با افزایش پارامترها درجه آزادی کاهش می‌یابد و برای جلوگیری از این اتفاق، با کاهش تعداد پارامترها تا حد ممکن، درجات آزادی بزرگتر حفظ می‌شود. راه‌های دیگری همچون شکستن معادلات بزرگ به بخش‌های کوچکتر و آزمون بخش‌های کوچکتر به صورت جداگانه قبل از ترکیب کردن آن‌ها و سپس برازش همه اجزا در کنار هم نیز موجود می‌باشد. با اتمام آنالیزهای اولیه و تعیین متغیرهای مهم در زیر-مدل و زیر-زیر-مدل و تعیین فرم بهینه ریاضیاتی آن‌ها، نوبت به خالص سازی مدل می‌رسد. هدف از خالص‌سازی مدل، اولا، برای افزایش اعتبار پیشگویی (کاهش خطای استاندارد تخمین‌ها) و ثانیا، برای افزایش بینش در زمینه دینامیک جمعیت حاصل از تجزیه و تحلیل مدل می‌باشد. دو ابزاری که با آن‌ها می‌توان به تدریج مدل را تحلیلی‌تر نمود به شرح زیر است. ابزار اول، انجام آزمایشات فیزیولوژی در آزمایشگاه

1. Gause

می‌باشد که با آن می‌توان به اطلاعات مفیدی در برقراری رابطه بین ثابت‌های مدل‌های رگرسیونی حاصل از داده‌های میدانی با پارامترهای مختلف فیزیولوژیک دست یافت. هدف از چنین کاری تعیین تعداد معدودی از معیارهای قابل اندازه‌گیری است که رفتار عامل بیوکنترل در زمان را در اکوسیستم‌های جمعیت‌های طبیعی یک آفت تعیین می‌کند. ابزار دوم، وارد کردن متغیرهای مستقلی به معادله Y می‌باشد که متغیرهایی تصادفی فرض می‌شوند. در اینجا به جای پیش‌بینی یک مقدار خاص از Y یک توزیع احتمالاتی از Y پیش‌بینی می‌شود. بحث در خصوص مدل‌های تصادفی[1] و جنبه‌های مختلف تفاوت آن‌ها با مدل‌های قطعی[2] (مرکز توجه در این مقاله) خود فرصت دیگری می‌طلبد که می‌تواند موضوع نوشته دیگری باشد.

جدول ۱– نمودار تصمیم‌سازی در خصوص بهترین معادله توصیف کننده یک پدیده زیستی دینامیکی. این دیاگرام درختی با استفاده از پاسخ‌های بله و خیر به سوالات بالا ساخته شده است.

کد	معادله مناسب	dY/dX به بی نهایت میل می کند هر گاه X به یک مجانب زیرین X-min میل کند	dY/dX به صفر میل می کند هر گاه Y به یک مجانب فوقانی Y-max میل کند	dY/dX به طور عکس متناسب با X است	dY/dX متناسب با Y می باشد	dY/dX متناسب با X است
۱	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)(Y_{max}-Y)Y}{(X-X_{min})X}$	بله	بله			
۲	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)(Y_{max}-Y)Y}{X}$	خیر		بله		
۳	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)Y}{(X-X_{min})X}$	بله	خیر			
۴	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)Y}{X}$	خیر			بله	
۵	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)(Y_{max}-Y)Y}{(X-X_{min})}$	بله	بله			
۶	$\frac{dY}{dX}=(b+cX)(Y_{max}-Y)Y$	خیر		خیر		
۷	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)Y}{(X-X_{min})}$	بله	خیر			
۸	$\frac{dY}{dX}=(b+cX)Y$	خیر				بله
۹	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)(Y_{max}-Y)}{(X-X_{min})X}$	بله	بله			
۱۰	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)(Y_{max}-Y)}{X}$	خیر		بله		
۱۱	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)}{(X-X_{min})X}$	بله	خیر			
۱۲	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)}{X}$	خیر			خیر	
۱۳	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)(Y_{max}-Y)}{(X-X_{min})}$	بله	بله			
۱۴	$\frac{dY}{dX}=(b+cX)(Y_{max}-Y)$	خیر		خیر		
۱۵	$\frac{dY}{dX}=\frac{(b+cX)}{(X-X_{min})}$	بله	خیر			
۱۶	$\frac{dY}{dX}=(b+cX)$	خیر				
۱۷	$\frac{dY}{dX}=\frac{bY(Y_{max}-Y)}{(X-X_{min})X}$	بله	بله			
۱۸	$\frac{dY}{dX}=\frac{bY(Y_{max}-Y)}{X}$	خیر		بله		
۱۹	$\frac{dY}{dX}=\frac{bY}{(X-X_{min})X}$	بله	خیر			
۲۰	$\frac{dY}{dX}=\frac{bY}{X}$	خیر			بله	
۲۱	$\frac{dY}{dX}=\frac{bY(Y_{max}-Y)}{(X-X_{min})}$	بله	بله			
۲۲	$\frac{dY}{dX}=bY(Y_{max}-Y)$	خیر		خیر		
۲۳	$\frac{dY}{dX}=\frac{bY}{(X-X_{min})}$	بله	خیر			خیر
۲۴	$\frac{dY}{dX}=bY$	خیر				

1. Stochastic models
2. Deterministic models

کد	معادله مناسب	dY/dX به بی نهایت میل می کند هر گاه X به یک مجانب زیرین X-min میل کند	dY/dX به صفر میل می کند هر گاه Y به یک مجانب فوقانی Y-max میل کند	dY/dX به طور عکس متناسب با X است	dY/dX متناسب با Y می باشد	dY/dX متناسب با X است
۲۵	$\frac{dY}{dX}=\frac{b(Ymax-Y)}{(X-Xmin)X}$	بله	بله	بله	خیر	خیر
۲۶	$\frac{dY}{dX}=\frac{b(Ymax-Y)}{X}$	خیر				
۲۷	$\frac{dY}{dX}=\frac{b}{(X-Xmin)X}$	بله	خیر			
۲۸	$\frac{dY}{dX}=\frac{b}{X}$	خیر				
۲۹	$\frac{dY}{dX}=\frac{b(Ymax-Y)}{(X-Xmin)}$	بله	بله	خیر		
۳۰	$\frac{dY}{dX}=b(Ymax-Y)$	خیر				
۳۱	$\frac{dY}{dX}=\frac{b}{(X-Xmin)}$	بله	خیر			
۳۲	$\frac{dY}{dX}=b$	خیر				

۲-۳- *روش‌های استفاده از مدل‌ها*

یک مدل تحلیلی با آگاهی کافی نسبت به مکانیزم‌های عمل هر یک از فاکتورهای موثر در یک پدیده را می‌توان برای یافتن عوامل کنترلی مناسب به کار برد. برای مثال فرضا معادله پایه در توصیف کارایی یک پارازیتوئید به صورت معادله ۶ باشد (وات ۱۹۵۹).

$$N_A = PK\left(1 - e^{-aN_0P^{1-b}}\right) \qquad (6)$$

N_0 بیانگر تراکم میزبان، P بیانگر تراکم پارازیتوئید و K تعداد تخم به ازای هر پارازیت ماده و N_A تعداد میزبان مورد حمله می‌باشد. به علاوه فرضا K تابعی از اندازه بدن، دما و رطوبت باشد که با معادله زیر تعیین می‌شود.

$$K = (r + sL)(e^{-dX_1^2} + He^{-fX_2^2})$$

L طول بدن حشره و d، s، r و f ثابت‌هایی برای مشخصات گونه حشره است. H رطوبت نسبی و X_1 و X_2 اختلافات بین هر دمای مشاهده شده با دو دمای بهینه مختلف است. به طور مشابه، ثابت a که اندازه کارایی جستجوگری پارازیتوئید را نشان می‌دهد را می‌توان در ارتباط با پارامتر دقت در تعقیب علایم میزبان (A) و چهار پارامتر فیزیولوژیک و بیوشیمیایی حاصل از فعالیت آئرودینامیک شامل F_1، F_2، F_3 و F_4 بیان کرد. نهایتا پارامتر d، میزان کاهش کارایی جستجوگری پارازیتوئید در اثر اشکال مختلف رقابت درون گونه‌ای را می‌توان به صورت تابعی از توانایی تشخیصی ضد سوپرپارازیتیسم[1] F_1، F_2، F_3، F_4، A، (D) بیان کرد. لحاظ چهار پارامتر اخیر به پیروی از فرضیه‌ای اولیه مبنی بر توانایی غلبه بر اثرات زیان‌بار افزایش تراکم پارازیتوئید (سوپرپارازیتیسم) با افزایش قدرت پرواز پارازیتوئید است[2]. با افزایش P مقدار N_A افزایش می‌یابد، زیرا هرچه پارازیتوئید بیشتر باشد قاعدتا نرخ تجمعی حمله بالاتر است ولی در یک زمان، افزایش رقابت بین پارازیتوئیدها باعث کاهش نرخ حمله می‌شود که منجر به لحاظ جمله $\exp(-aP^{-b})$ در مدل می‌شود.

افزایش تراکم میزبان N_0 نیز اثر عکس دارد. با افزایش تراکم میزبان یافتن آن‌ها به وسیله پارازیتوئید/شکارگر راحت‌تر شده و لذا N_A افزایش می‌یابد. به هر حال یک جمعیت از یک پارازیتوئید مشخص تعدادی متناهی تخم دارد و به محض عبور تراکم میزبان از یک سطح مشخص (PK) نسبت به تراکم پارازیتوئید، دیگر تخمی برای گذاشتن در بدن یا روی بدن میزبان موجود نخواهد بود. در چنین مواردی N_A به سطح اشباعی مجانب به PK می‌رسد و از این نقطه به بعد رقابت منفعل گروهی[3] میزبان تعیین کننده سرنوشت پارازیتیسم است (اشمالسن[4] ۱۹۴۹ به نقل از وات ۱۹۶۱). با توجه به تعاریف و توصیفات بالا، معادله ۶ به صورت ۷ بازنویسی می‌گردد.

$$N_A = P\left[(r + sL)(e^{-dX_1^2} + He^{-fX_2^2})\right]\left(1 - e^{-a(A,F_1,F_2,F_3,F_4)N_0P^{1-b(D,A,F_1,F_2,F_3,F_4)}}\right) \qquad (7)$$

---

۱. چنانچه پارازیتوئید بیش از یک تخم در بدن میزبان قرار دهد، سوپرپارازیتیسم رخ داده و اگر بیش از یک گونه از پارازیتوئیدها یک میزبان را پارازیته کنند مالتی پارازیتیسم رخ داده است. برای آشنایی بیشتر با طبقه‌بندی‌های مختلف انواع پارازیتیسم در حشرات به ون دریش و بیلوز (۲۰۱۲) مراجعه شود.

۲. به احتمال زیاد منظور وات (۱۹۶۱) در اینجا در توجیه استفاده از پارامترهای آئرودینامیک، مالتی پارازیتیسم بوده است.

3. Passive group competition

4. Schmalhausen

معادلاتی چون معادله ۷ که یک زیر-زیر-زیر-مدل شاخص است، ضرورت دوم در کابرد مدل‌های ریاضی مبنی بر شفاف‌سازی اهداف تحقیق را برآورده می‌سازد. برای فرمول‌بندی مدل و به دست آوردن مقادیر پارامترهای معادله ۷، نیاز به مطالعه گسترده تعداد زیادی از پارازیت‌ها از گونه‌های متنوع در زمینه‌های سه‌گانه‌ای دارد که عبارت‌اند از:

۱- سیستم علت-معلولی (طول بدن-دما-باروری)؛
۲- رابطه بین کارایی جستجوگری و فاکتورهای کنترل کننده آن؛ و
۳- کاهش کارایی جستجوگری و وابستگی آن به تراکم پارازیت و فاکتورهای خاص هر گونه تغییردهنده اثر تراکم پارازیت.

چنین تحقیقی لازم است در برگیرنده ترکیبی از دو فعالیت باشد. ابتدا، لازم است تا ثابت‌هایی مانند a در شرایط طبیعی و در خصوص تعداد قابل توجهی از گونه‌های پارازیتوئید اندازه‌گیری شده، سپس، مطالعات فیزیولوژیک، بیوشیمیایی و رفتاری در آزمایشگاه انجام شود تا ضمن تحلیل مکانیزم‌ها مشخص شود کدام فاکتورها در تعیین a نقش دارند. به دست آوردن مقادیر متغیرهای مختلف قابل دست ورزی منتج به حداقل‌سازی روند رشد جمعیت آفت، یک مساله ریاضی ساده نیست. چنین مسائلی امروزه در حیطه شاخه‌ای از ریاضیات به نام تحقیق در عملیات[1] و با استفاده از روش‌های متنوع برنامه ریزی خطی[2]، غیرخطی و دینامیکی و از طریق الگوریتم‌های خاص قابل‌حل‌اند. با استفاده از ابزارهای موجود در ریاضیات کلاسیک و مدرن، با چند روش می‌توان برخی مقادیر را حداکثر یا حداقل سازی کرد. انتخاب هر روش به فرمولاسیون مدل و نیز طبیعت یا زیست‌شناسی مساله بستگی دارد. به اختصار به چند روش اشاره می‌شود:

۱- فرض نمایید که لازم است روند رشد جمعیت آفت $T_{t:t+1}$ حداقل‌سازی شود و دست‌ورزی همه متغیرهای موجود در مدل مجاز باشد. Piها را پارازیتوئیدها یا شکارگرها، Diها را عوامل بیماری‌زا و Wiها را فاکتورهای آب و هوایی در نظر بگیرید. چنان چه روند رشد جمعیت آفت به عنوان تابعی از این متغیرهای مستقل به صورت زیر

$$T_{t:t+1} = f(P_1 \dots P_n, D_1 \dots D_n, W_1 \dots W_n) \qquad (8)$$

در نظر گرفته شود می‌توان مقادیری از هر متغیر مستقل که باعث حداقل شدن $T_{t:t+1}$ می‌شود را به صورت زیر به دست آورد. شرط اول مشتق پذیر بودن این تابع نسبت به تمامی متغیرهای اشاره شده در بالا ست و دوم اینکه بایستی دارای یک حداقل یا حداقل‌های موضعی[3] مختلف قابل محاسبه با رویکردهای تکراری باشد. دستگاه معادلات با مشتقات جزئی زیر محاسبه می‌شوند.

$$\frac{\partial T}{\partial P_1} = f'_{P_1}(P_1 \dots P_n, D_1 \dots D_n, W_1 \dots W_n) \qquad (9)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial T}{\partial W_n} = f'_{W_n}(P_1 \dots P_n, D_1 \dots D_n, W_1 \dots W_n)$$

سپس هر معادله در دستگاه ۹ را مساوی صفر قرار داده و همه به طور همزمان برای مقادیر مناسبی از P_1 تا Wn محاسبه می‌شوند. دو ایراد به این مدل وارد است. اول اینکه انسان نمی‌تواند همه متغیرهای مستقل مربوطه را کنترل نماید و ثانیا حل همزمان همه معادلات در دستگاه ۹ سختی ریاضیاتی قابل توجهی پدید می‌آورد. به هر حال پایه همه روش‌های مزبور همین رویه است. همه روش‌های معادل روش ۱ در بالا پاسخگوی این سوال هستند که کدام مقادیر از هر یک از متغیرها به حداقل‌سازی روند رشد جمعیت آفت می‌انجامند. به بیان دیگر، مقدار صفر برای هر متغیر گویای لزوم عدم به کارگیری آن عامل کنترل است.

۲- بیائید مساله را کمی پیچیده‌تر و در عین حال واقعی‌تر تعریف کنیم. هدف، حداقل‌سازی روند رشد جمعیت و N_t، تعداد حشرات آفت درست قبل از تخم‌گذاری در سال t، است. فرض کنیدکه کنترلی بر این جمعیت و نیز آب و هوا در دست نباشد بدین معنی که برخی متغیرها در تنظیم روند رشد جمعیت از کنترل خارج باشند. در چنین مواردی مجموعه معادلات ۹ شامل یک معادله به ازای هر متغیر مستقلی خواهد بود که توانایی کنترل آن فراهم است. سایر متغیرهای مستقل به عنوان ثابت با مقادیر در سال t در نظر گرفته می‌شوند. مجددا مساله یافتن حداقل تابعی است که محدودیت‌های نقطه‌ای در آن اعمال می‌شود.

۳- فرمول بندی مورد اشاره در ۲ هنوز به اندازه کافی واقعی نیست زیرا علاوه بر محدودیت نقطه‌ای روی جواب مساله، محدودیت‌های دیگری وجود دارند که جزئیات بیشتری دارند. برای مثال در کنترل شیمیایی چنانچه غلظت سم مصرفی (دوز) و یا دفعات سم پاشی خیلی افزایش یابد عواقب عدیده ای در بر دارد. اولا، قیمت سموم افزایش خواهد یافت و سود حاصل از تولید محصولات کاهش می‌یابد؛ ثانیا، اثرات جانبی مخرب روی دیگر فون‌های منطقه همچون فون حشرات مفید رخ خواهد داد؛ و ثالثا از حد مجاز باقیمانده سموم در محصولات عدول خواهد شد. معادل همین نگرانی‌ها در خصوص کنترل بیولوژیک و نیز کنترل زراعی نیز متصور است. در خصوص واردسازی شکارگرها، پارازیتوئیدها و عوامل بیمارگر، رهاسازی جمعیت‌های بزرگ گران و رهاسازی کم بی‌تاثیر بوده و به سهولت از محیط حذف می‌شوند. چنانچه انواع مختلف محدودیت‌های اشاره شده در بالا در نظر

1. Operation research

۲. Linear programming که موضوعی متفاوت از برنامه نویسی کامپیوتری Computer programming است.

۳. Local extremum شامل مینیمم و ماکزیمم موضعی و نقطه زینی است.

گرفته شوند ارتباط آن‌ها با یکدیگر به وضوح قابل مشاهده است. حداکثر هزینه برای رهاسازی عوامل بیوکنترل به هزینه لازم در سایر روش‌های کنترل بستگی دارد زیرا کل هزینه کنترل (بنا به ملاحظات اقتصادی) نبایست از یک مقدار معین تجاوز کند. به جای اعمال یک سری محدودیت‌های نقطه‌ای همانند آنچه در رویکرد ۲ آمد، می‌توان مساله حداقل/حداکثر سازی را با اتخاذ محدودیت‌های تابعی به صورت واقعی‌تری فرمول بندی نمود. در مساله اخیر معادله پایه به صورت

$$T_{t:t+1} = f(N_t, P_1 \dots P_n, D_1 \dots D_n, W_1 \dots W_n) \qquad (10)$$

است ولی تحت محدودیت‌هایی به فرم

$$P1_{P1} + P2_{P2} + \cdots C3_{C3} = 2700 \qquad (11)$$

در می آید که P_1 هزینه رهاسازی هر عدد پارازیتوئید/شکارگر اول، P_2 هزینه رهاسازی هر عدد پارازیتوئید/شکارگر دوم و C_3 هزینه اعمال کنترل شیمیایی به ازای هر هکتار است که به عنوان مثال کل این هزینه معادل ۲۷۰۰ دلار در نظر گرفته شده است. مساله ۱۰ و محدودیت ۱۱ را می‌توان با ضرایب لاگرانژ (موجود در کتب حسابان پیشرفته) حل کرد.

سه روش بیشینه‌یابی اشاره شده در بالا را می‌توان به روش‌های کلاسیک حسابان حل نمود. سه روش بعدی به مقداری تغییر و توسعه در روش‌های قبلی نیاز دارد. در مساله قبل شرط ۱۱ در اصل گویای کمتر بودن هزینه‌ها از ۲۷۰۰ دلار است. این تفاوت به ظاهر جزئی ولی مهم از جنبه ریاضی به فرمول‌بندی قیدها به صورت

$$P1_{P1} + P2_{P2} + \cdots C3_{C3} \leq 2700 \qquad (12)$$

منجر می شود. پرواضح است که هیچگاه مقادیر دقیق هزینه‌ها یا مصرف مواد ضروری نیست بلکه کمتر یا مساوی آن‌ها مدنظر گرفته می‌شود. سه روش بعدی، از این قیود برای حل مساله اکسترمم (بیشینه/کمینه) استفاده می‌کنند. هر سه روش آتی با عنوان مسایل برنامه‌ریزی ریاضی از شاخه تحقیق در عملیات یاد می‌شوند.

۴- چنانچه مساله و نامعادلات مربوط به قیود به صورت خطی در نظر گرفته شوند یک مساله برنامه‌ریزی خطی ساخته می‌شود. به هر حال مجددا مساله خطی از واقعیت به دور است زیرا مساله روند رشد جمعیت آفات خطی نمی‌باشد و نرخ بسیاری از فرآیندهای زیر–زیر–مدل، همانند آنچه در معادله ۶ رخ می‌دهد، با رسیدن به مجانب‌ها کاهش می‌یابد.

۵- چنانچه معادلات پایه و نامساوی‌های قیود به صورت غیرخطی باشند مساله برنامه‌ریزی غیر خطی شکل می‌گیرد. الگوریتم‌های حل مساله با این رویکرد در منابع تحقیق در عملیات یافت می‌شود

۶- در کلیه موارد فوق، مساله در یک بازه زمانی t تا t+1 در نظر گرفته می‌شود ولی رویکرد کنترل آفات از این منظر متفاوت است. معادله ۱۰ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_{t:t+1} = f(N_t, P_{1,t} \dots P_{n,t}, D_{1,t} \dots D_{n,t}, W_{1,t} \dots W_{n,t})$$

حال به عنوان نتیجه‌ای از تخصیص مقادیر خاص به متغیرهای مستقل معین و در نتیجه اتخاذ مقادیر معین توسط بقیه متغیرهای مستقل (آب و هوا و ....)، در سال t، معادله ۱۰ یک مقدار برای $T_{t:t+1}$ تولید می‌کند و این، مقدار N_{t+1} را تعیین می‌کند زیرا طبق معادله ۱:

$$N_{t+1} = T_{t:t+1} N_t \qquad (13)$$

معادلات مشابه به معادله ۱۳ قابل توسعه برای متغیرهای مستقل معینی چون پارازیتوئیدها و شکارگرهاست. به عبارت دیگر یک سیستمِ بسته خواهد بودکه در آن N_{t+n} نه تنها تابعی از اتفاقات در سالِ t+n در نظر گرفته می‌شود بلکه به عنوان تابعی از اتفاقات در سال‌های t+n-1، t+n-2، t+n-3، و غیره نیز هست.

شش رویکرد اشاره شده در بالا برای مساله اکسترمم‌یابی توابع به عنوان فرآیندهای تصمیم سازی تک مرحله‌ای در نظر گرفته می‌شوند. در مقابل رویکرد تصمیم‌سازی چند مرحله‌ای که دارای مزایایی نسبی است در ادامه شرح داده می‌شود. فرض کنید تصمیم این باشد که یک حشره با روش حذف تک مرحله‌ای کنترل شود. آیا این بهترین روش برای کنترل حشره است؟ علاوه بر این که تعمیم این روش به ابعاد گسترده غیرممکن است (یعنی کنترل یک مرحله‌ای کل جمعیت یک آفت در یک منطقه به هر روش)، دلایل دیگری نیز وجود دارد که نشان می‌دهد این روش بهترین راه نیست. به عنوان مثال معادله ۶ نشان می‌دهد که عوامل کنترل ممکن است به ازای یک واحد کنترل، بسیار بی‌تاثیر باشند و لذا وقتی که واحدهای زیادی برای کاربرد هم زمان و تک مرحله‌ای با هم جمع شوند بسیار گران خواهند شد. بنابراین احتمالا تقسیم فرآیند کنترل به چند مرحله مفیدتر واقع شود. برای پاسخ به این سوال به یک نظریه در خصوص تخصیص بهینه منابع به هر مرحله از کنترل نیاز است و برنامه ریزی دینامیکی ممکن است پاسخی به این نیاز باشد. حال فرض کنید قرار این باشد که کنترل حشره آفت به عنوان یک فرآیند تخصیص چندمرحله‌ای در نظر گرفته شود. این بدین مفهوم است که چگونه باید بودجه موجود در داخل یک فصل یا در بین فصول مختلف به هر روش کنترلی تخصیص داده شود. چنانچه n سال داشته و یا n زمان در یک فصل و برای هر n، از m روش کنترل استفاده شود لازم است شاخص رشد بلند–مدت جمعیت به عنوان تابعی از mn متغیر در نظر گرفته

شود. طبیعتا کار با چنین تابعی با لحاظ حداقل‌ها برای m و n برای یک آفت، سنگین و هزینه بر خواهد بود. در مقابل، پیشنهاد برنامه‌ریزی دینامیکی این است که به یک فرآیند تصمیم‌سازی چند مرحله‌ای به صورت چند فرآیند تصمیم سازی تک مرحله‌ای نگاه شود. این روش، آنالیز و ارتباط شکل خروجی‌های تابعی در مرحله nام به تصمیمات در مرحله ۱-nام است. در عمل یک فرآیند تصمیم‌سازی mn بعدی که برای یک نقطه ثابت در زمان در نظر گرفته شده است با n عدد فرآیند تصمیم‌سازی m بعدی در هر نقطه از زمان جایگزین می‌شود. به طور خلاصه به نظر می‌رسد روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی و دینامیکی در فرمول‌بندی مساله حداقل‌سازی شاخص رشد جمعیت یک آفت واقعی‌ترین روش‌ها هستند.

۷- روش کلاسیک در یافتن بیشینه‌های $T_{t:t+n}$ این است که برای یافتن نقاط بیشینه لازم است همه نقاط در فضای mn بعدی را جستجو نمود ولی امروزه با روش‌های ریاضی مدرن به همراه کامپیوترهای قوی می‌توان بیشینه‌ها را روی یک سطح n بعدی یا همان لاتیس (شبکه) پیدا کرد.

۳- بخش دوم، یک مثال کاربردی

در ادامه برای روشن شدن نحوه استفاده از مدل‌های پایه‌ای در تجزیه و تحلیل کنترل تلفیقی آفات بر اساس روش‌های شیمیایی و کنترل بیولوژیک، گزیده ای از مقاله تانگ و چک (۲۰۰۸) ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که همانند بخش اول، در این بخش نیز جملات عینا از مقاله مذکور ترجمه و تشریحی مختصر برای روشن شدن برخی مطالب اضافه شده است.

کنترل خسارت حشرات آفت در قالب رویکرد نوین مدیریت تلفیقی آفات IPM[1] که در دهه ۱۹۵۰ میلادی معرفی (استرن[2]، ۱۹۷۳) و سپس در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی توسعه داده شد (ون لنترن[3] ۲۰۰۰)، یک راهکار بلند مدت است که در آن روش‌های مختلف کنترل جمعیت (و به تبع آن خسارت) حشرات آفت بر اساس اتفاقات ترکیبی فنولوژیک گیاه میزبان-حشره گیاه خوار-دشمنان طبیعی با یکدیگر ترکیب شده، در قالب یک برنامه مدیریتی برای کاهش جمعیت حشرات آفت به زیر سطح زیان اقتصادی EIL[4] و درست قبل از این سطح جمعیتی یعنی در آستانه اقتصادی ET[5] اعمال می‌شود. ET بیانگر جمعیتی از حشرات است که اقدام کنترلی برای جلوگیری از رسیدن به EIL بایستی صورت پذیرد و EIL اندازه‌ای از جمعیت حشره است که خسارت اقتصادی وارد می‌سازد. بنابراین فهم و استفاده مناسب از سطوح تصمیم سازی اقتصادی در مواجهه با آفات باعث افزایش تولید و سود حاصل از آن و حفظ کیفیت محیط زیست به دلیل مصرف بهینه سموم شیمیایی می‌گردد.

یکی از جنبه‌های جذاب یک سیستم دینامیکی، کاربرد آن در پیشگویی وقایع است. برهمکنش‌های میزبان-پارازیتوئید با روش‌های کنترل تلفیقی به منظور تشخیص فاکتورهای پایدارکننده چنین برهمکنش‌هایی توسط محققین زیادی مدل سازی و مطالعه شده است. به طور خاص، مدل‌های تحلیلی به دلیل سادگی‌شان، مطالعه فاکتورهای موثر بر پایداری سیستم در نقطه تعادل مرتبط با پارازیتیسم را تسهیل می‌سازند. در مقاله تانگ و چک (۲۰۰۸) هر دو رویکرد معادلات دیفرانسیل که مدل‌های زمان پیوسته‌اند و معادلات تفاضلی که مدل‌های زمان گسسته هستند برای مدل‌سازی یک سیستم میزبان-پارازیتوئید با لحاظ یک راهکار کنترل تلفیقی به کار گرفته شده است. مدل دیفرانسیلی برای برهمکنش‌های شکار-شکارگری‌ای توسعه داده شده است که در آن جمعیت‌های میزبان و پارازیتوئید در داخل نسل‌ها و نیز بین نسل‌های متوالی به طور پیوسته به روز می‌شوند. بنابراین زمانی که نسل‌های میزبان همپوشانی دارند یک دستگاه متشکل از دو معادله دیفرانسیلی به صورت زیر برای توصیف دینامیک جفتی میزبان-پارازیتوئید مناسب‌تر است.

$$\frac{dH}{dt} = b_1(H)H - f(H,P)P, \qquad (14)$$
$$\frac{dP}{dt} = \gamma_1 f(H,P)P - \mu P$$

که در آن H و P فراوانی میزبان و پارازیتوئید (در اینجا عموما مرحله بالغ حشرات در نظر گرفته می‌شود)، $b_1(H)$ نرخ خالص سرانه رشد جمعیت میزبان، $f(H,P)$ واکنش تابعی سرانه پارازیتوئید یا نرخ حمله به میزبان، μ نرخ مرگ‌ومیر سرانه پارازیتوئید و γ_1 کارائی تبدیل میزبان به پارازیتوئید است. لازم به ذکر است مدل نیکلسون-بیلی[6] برهمکنش میزبان-پارازیتوئید در نسل‌های گسسته را توصیف می‌کند و یک نقطه تعادل مثبت دارد که هیچگاه پایدار نیست (نیکلسون و بیلی ۱۹۳۵). فاکتورهای پایدارکننده متنوعی چون ناهمگونی فضایی، جستجوی تصادفی، رشد وابسته به تراکم میزبان، انواعی از واکنش تابعی پارازیتوئیدها و مداخله متقابل[7] بین پارازیتوئیدها برای همزیستی پایدار سیستم‌های تک میزبان-تک پارازیتوئید به کار گرفته شده‌اند. یک دستگاه معادلات تفاضلی جفت شده میزبان-پارازیتوئید با نسل‌های گسسته را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$H_{t+1} = b_2(H_t)H_t g(H_t,P_t) \qquad (15)$$
$$P_{t+1} = \gamma_2 H_t[1 - g(H_t,P_t)] + \delta P_t$$

1. Integrated Pest Management
2. Stern
3. Van Lenteren
4. Economic Injury Level
5. Economic Threshold
6. Nicolson-Baily
7. Mutual interference

که در آن H_t و P_t فراوانی جمعیت میزبان و پارازیتوئید در زمان t، $b_2(H)$ نرخ خالص سرانه افزایش جمعیت میزبان، $g(H,P)$ نسبتی از جمعیت میزبان که از پارازیته شدن فرار می‌کنند، γ_2 واکنش عددی یا تعداد پارازیتوئیدهای تولید و خارج شده از هر میزبان منفرد پارازیته و δ که همواره مقادیر بزرگ‌تر مساوی صفر دارد بقای مستقل از تراکم پارازیتوئیدهاست که در نسل t نمود می‌یابد. نرخ بقای بین نسلی پارازیتوئیدها متاثر از چندین فاکتور – از قبیل مهاجرت به داخل، بقای زمستانه و پارازیته کردن میزبان جایگزین– است. واکنش تابعی یک مصرف کننده به تغییر در تراکم‌های یک منبع عموما به صورت نرخ مصرف سرانه منبع توسط مصرف کننده به عنوان تابعی از تراکم منبع در نظر گرفته می‌شود. امروزه پرکاربردترین مدل برای توصیف واکنش تابعی پارازیتوئیدها معادله دیسک هولینگ نوع II است که افزایش با شیب کاهش یابنده به سطح مجانبی اشباعی در نرخ حمله را توصیف می‌کند (هولینگ[1] ۱۹۵۹). رشد میزبان در غیاب پارازیتوئیدها عموما به صورت لجستیک و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$b_1(H) = r\left(1-\frac{H}{K}\right), \qquad b_2(H) = \exp\left(r\left(1-\frac{H}{K}\right)\right) \tag{16}$$

که در آن r نرخ رشد ذاتی و K ظرفیت قابل تحمل محیط می‌باشد. واکنش تابعی نوع II هولینگ به فرم زیر فرمول‌بندی می‌شود.

$$f(H,P) = \frac{\alpha TH}{1+\alpha T_h H}, \qquad g(H,P) = exp\left(\frac{\alpha TH}{1+\alpha T_h H}\right) \tag{17}$$

که در آن α نرخ جستجوگری لحظه‌ای به معنی میانگین تعداد دفعات مواجهه سرانه هر پارازیتوئید با میزبان در هر واحد زمانی جستجوست، T کل زمان در دسترس برای جستجو یعنی کل زمانی که میزبان‌ها در معرض پارازیتوئیدها قرار دارند و Th زمان دستیابی یعنی مدت زمان مابین مواجهه با یک میزبان تا جستجوی مجدد یک میزبان دیگر و به عبارت بهتر مدت زمان مصروف برای شکار کردن و مصرف یک میزبان/طعمه است. یادآور می‌شود که انواع دیگری از واکنش‌های رشدی همچون توابع رشدی بورتون–هالت[2] (مدل گسسته) و گامپرتز[3] (مدل پیوسته) برای جمعیت میزبان موجود است. همچنین ترکیبات مختلفی از این توابع رشدی و نیز واکنش‌های تابعی نیز قابل تعریف و کاربرد هستند که منجر به سیستم‌های متفاوت میزبان–پارازیتوئید و رفتار دینامیکی متفاوت در این سیستم‌ها می‌شود. مدل زمان پیوسته ۱۴ با توابع رشدی $b_1(H)$ و واکنش‌های تابعی $f(H,P)$ مختلف، دینامیک بسیار ساده‌ای دارد که فقط شامل نقطه تعادل پایدار[4] و یا چرخه‌های حدی[5] است. با این حال، بدینگتون[6] و همکاران (۱۹۷۵) نشان دادند که مدل‌های زمان گسسته میزبان–پارازیتوئید می‌توانند مجموعه غنی‌تری از انواع الگوهای دینامیکی شامل همزیستی، انشعاب دوبل شدن دوره تناوب[7] و جواب‌های آشوبناک[8] را نشان دهند. طبیعت گسسته فعالیت‌های انسان و اثرات منجر به تغییرات بسیار سریع در تراکم جمعیت آفات را می‌توان با معادلات دیفرانسیل تکانشی[9] توصیف کرد. چنین معادلاتی از سه جز تشکیل شده‌اند:

یک معادله دیفرانسیل زمان پیوسته که حاکم بر وضعیت سیستم در بین تکانه‌هاست؛ معادله تکانه که یک جهش تکانه‌ای را با یک تابع جهشی در زمان رخ دادن جهش مدل می‌کند؛ و یک قید جهش که مجموعه‌ای از جهش‌ها است که در آن معادله جهش فعال است.

به عنوان مثال، کاهش تکانشی تراکم جمعیت یک آفت با شکار انبوه و یا مسموم کردن آن با سموم شیمیایی ممکن است. همچنین افزایش تکانشی جمعیت یک شکارگر یا پارازیتوئید با تولید و رهاسازی انبوه آن امکان پذیر است. مدل‌های ۱۴ و ۱۵ با لحاظ یک راهکار مدیریت تلفیقی از قبیل رهاسازی دشمنان طبیعی یا پاشش سموم شیمیایی در زمان رسیدن جمعیت آفت به ET به صورت زیر توسعه داده شده است. از جنبه ریاضی، توسعه مدل ۱۴ با ET به دلیل پیوستگی جواب‌ها آسان است و به صورت (۱۸) توسعه می‌یابد.

$$\begin{gathered}
\left\{\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= b_1(H)H - f(H,P)P \\ \frac{dP(t)}{dt} &= \gamma_1 f(H,P)P - \mu P \end{aligned}\right\} \quad if \quad H(t) < ET \\
\left\{\begin{aligned} H(t^+) &= (1-q_1)H(t), \\ P(t^+) &= (1+q_2)P(t) + \tau \end{aligned}\right\} \quad if \quad H(t) = ET \quad (18) \\
H(0^+) = H_0 < EL, \qquad P(0^+) = P_0
\end{gathered}$$

1. Holling
2. Beverton-Holt
3. Gompertz
4. Stable equilibrium
5. Limit cycle
6. Beddington
7. Period doubling bifurcation
8. Chaotic solutions
9. Impulsive

که در آن $H(t^+)$ و $P(t^+)$ فراوانی میزبان و پارازیتوئید بعد از اعمال راهکار کنترلی در زمان t و $H(0^+)$ و $P(0^+)$ تراکم اولیه از جمعیت آن‌ها می‌باشد. در این مدل فرض می‌شود که تراکم اولیه جمعیت میزبان همیشه کمتر از ET است. در مدل ۱۸، $0 \le q_1 < 1$ نسبتی است که متناسب با آن، تراکم آفت به محض رسیدن جمعیت به ET با کشتن یا شکار انبوه کاهش می‌یابد در حالیکه $q_2 \ge 0$ نسبتی برای نرخ رهاسازی پارازیتوئیدها و $\tau \ge 0$ تعداد ثابت دشمنان طبیعی رهاسازی شده در زمان t است. با جمعیت اولیه (H_0,P_0) یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

- بیشترین جمعیت میزبان همیشه زیر ET باقی می‌ماند؛
- بیشترین جمعیت میزبان به تعداد متناهی بار به ET می‌رسد؛
- بیشترین جمعیت میزبان نامتناهی بار به ET می‌رسد.

نتیجتا زمان‌های رسیدن جواب‌ها به ET تعیین شده (tn,n=1,2,...) و بر اساس آن یک برنامه مدیریت تلفیقی طراحی می‌شود. به علاوه، Tnc=tn-tn-1 با $t_0=0$ به عنوان طول دوره طغیان میزبان در نظر گرفته می‌شود. n می‌تواند بسته به جواب مدل‌ها متناهی یا نامتناهی باشد. به دلیل ناپیوستگی و پیچیدگی رفتار دینامیکی مدل‌های گسسته، جواب‌ها دقیقا ET را قطع نمی‌کنند. اتفاقی که عموما رخ می‌دهد جهش ناگهانی به زیر یا بالای ET در برخی نسل‌ها است که در صورت وقوع چنین وضعیتی، تاکتیک‌های کنترلی همچون کنترل بیولوژیک و کنترل زراعی، به دلیل تاخیر در پاسخ میزبان، قادر به کاهش فوری تراکم آفت نیستند. بنابراین یک سمپاشی در این نسل لازم است تا جمعیت سریع، مطمئن و آسان کاهش یابد. لازم به ذکر است اتکال کامل به آفت کش‌های شیمیایی یک رویکرد نامطلوب به شمار می‌رود، زیرا حشرات به سرعت مقاوم می‌شوند و در نتیجه راهکارهای موثر بایستی در یک برنامه تلفیقی در هم ادغام و مورد استفاده قرار گیرند. برای مثال اگر چنانچه آفتی در نسل k یک طغیان داشته باشد به نحوی که $b_2(H_k)H_kg(H_k,P_k) > ET$، یک سمپاشی لازم است و حداقل تعداد $T_k^d b_2(H_k)H_kg(H_k,P_k)$ حشره آفت لازم است کشته شوند تا $(1-T_k^d)b_2(H_k)H_kg(H_k,P_k)=ET$ گردد که در آن $1-T_k^d$ نسبت نرخ بقا در نسل k بعد از کاربرد سم می‌باشد که به تراکم میزبان و پارازیتوئید بستگی دارد. برای کنترل موثرتر لازم است دیگر روش‌های کنترل از قبیل کنترل بیولوژیک به طور هم زمان به کار روند. لذا بر اساس مدل ۱۵ مدل زیر با لحاظ ET توسعه می‌یابد.

$$\begin{Bmatrix} H_{t+1} = \min\{b_2(H_t)H_tg(H_t,P_t), ET\}, \\ P_{t+1} = \gamma_2 H_t[1-g(H_t,P_t)] + \delta P_t, \\ P_{t+1^+} = (1+q_2)P_{t+1} + \tau, \quad if \quad H_{t+1} = ET, \end{Bmatrix} \qquad (19)$$
$$H_{0^+} = H_0 < ET, \quad P_{0^+} = P_0$$

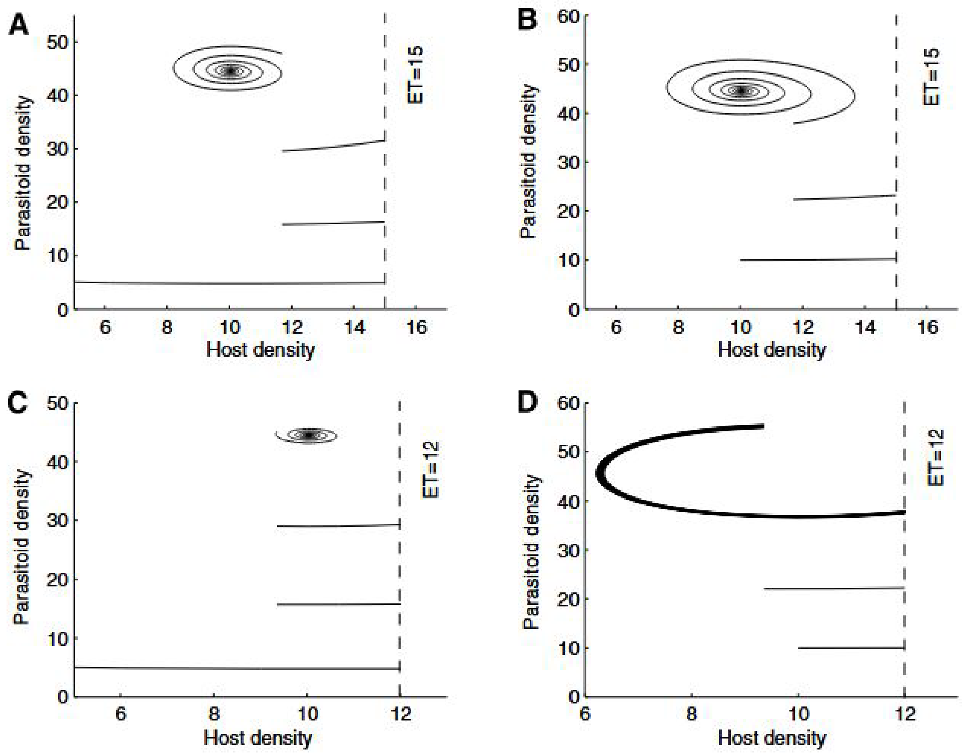
که در جمله اول کمترین مقدار بین آستانه اقتصادی و جمعیت میزبان در زمان t در نظر گرفته می‌شود. $q_2 \ge 0$ نسبتی برای رهاسازی پارازیتوئیدها و $\tau \ge 0$ تعداد ثابت دشمنان طبیعی رهاسازی شده در زمان t می‌باشد. نرخ کشتن آنی با حشره کش را می‌توان با رابطه ۲۰ تعیین کرد.

$$T_t^d = \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{ET}{b_2(H_t)H_tg(H_t,P_t)}, & if \quad b_2(H_t)H_tg(H_t,P_t) > ET, \\ 0 & otherwise \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

برای عمومیت دادن بیشتر به فرمولاسیون مدل، زمانی که حشره آفت در نسل k یک طغیان داشته و از ET عدول نماید یک سمپاشی به کار می‌رود تا $(1-T_k^d)b_2(H_k)H_kg(H_k,P_k)=(1-q_1)ET$ برقرار شود، آنگاه مدل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} H_{t+1} = b_2(H_t)H_tg(H_t,P_t), \\ P_{t+1} = \gamma_2 H_t[1-g(H_t,P_t)] + \delta P_t, \end{Bmatrix} \quad if \ \ b_2(H_t)H_tg(H_t,P_t) \le ET, \qquad (21)$$
$$\begin{Bmatrix} H_{t+1^+} = (1-q_1)ET, \\ P_{t+1^+} = (1+q_2)P_{t+1} + \tau, \end{Bmatrix} \quad if \quad b_2(H_t)H_tg(H_t,P_t) > ET$$
$$H_{0^+} = H_0 < ET, \quad P_{0^+} = P_0$$

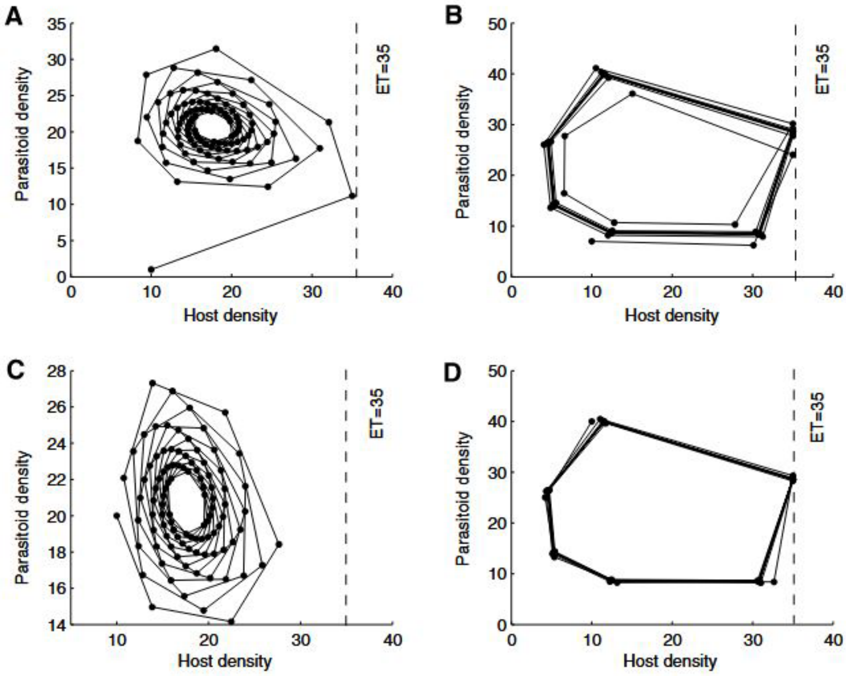
مدل ۲۱ در حالت $q_1=0$ به مدل ۱۹ کاهش می‌یابد. مدل‌های ۱۸ و ۱۹ شامل فاکتورهای کلیدی یک برنامه کنترل تلفیقی شامل ET، نرخ کشتن لحظه‌ای (q_1 در مدل ۱۸ و Ttd در مدل ۱۹)، دوز و زمان اعمال سمپاشی (Tnc و Ttd) و نرخ رهاسازی دشمنان طبیعی (q_2 و τ) هستند و لذا قابل استفاده در تخمین و پیش‌بینی تراکم جمعیت میزبان–پارازیتوئید، کمک در طراحی یک برنامه مدیریتی مناسب، تصمیم سازی مدیریتی، کنترل جمعیت آفت تا تنزل به زیر ET و جلوگیری از خسارت اقتصادی‌اند. پارامترهای Tnc و Ttd اطلاعات ضروری برای تصمیم سازی در خصوص چگونگی به کار بستن موفق یک برنامه مدیریت تلفیقی ارائه می‌دهند. با حل عددی مدل‌های ۱۸ و ۱۹ فاکتورهای موثر بر یک برنامه مدیریت تلفیقی از قبیل تراکم اولیه جمعیت، نسبت میزبان–پارازیتوئید و روش‌های انبوه سازی یا افزون سازی[۱] کنترل بیولوژیک و نیز روابط بین ET، وضعیت‌های پایدار جمعیت و روش‌های کنترل قابل محاسبه است. چنانچه ET نسبتا بزرگ باشد (مثلا بزرگتر از بیشترین دامنه نوسانات جمعیت میزبان)، موفقیت روش‌های کنترل به میزان زیادی به مقادیر اولیه و نسبت‌های میزبان–پارازیتوئید بستگی خواهد داشت. در مدل ۱۸ با لحاظ مقادیر $r=1.9, T=100, T_h=1, K=150, \alpha=0.0004,$ $q_1=0.22,\ q_2=0.2\ ,\tau=10$ مختصات نقطه تعادل مثبت پایدار سیستم برابر $E_1=(10.04,44.498)$ خواهد بود و لذا با لحاظ ET بالاتر از ۱۰/۰۴ اثر دو مقدار اولیه (۵،۵) و (۱۰،۱۰) و دو آستانه اقتصادی ۱۲ و ۱۵ بر راهکارهای مدیریت تلفیقی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱– اثر مقادیر اولیه و سطوح مختلف آستانه اقتصادی بر راهکارهای مدیریت تلفیقی بر اساس مدل ۱۸

بخش A در شکل ۱ بیانگر آن است که با مقدار اولیه (۵و۵) جواب دستگاه با لحاظ مقادیر فرضی فوق برای پارامترها در نهایت پس از اعمال سه برنامه کنترل تلفیقی به نقطه تعادل پایدار سیستم E_1 میل می‌کند. حال اگر مقدار اولیه‌ی (۱۰و۱۰) لحاظ شود، بخش B در شکل ۱ نشان می‌دهد که پس از اعمال دو بار کنترل تلفیقی، جمعیت به نقطه تعادل پایدار خود میل می‌کند. حال چنانچه ET را از ۱۵ به ۱۲ کاهش داده و مقادیر اولیه به صورت قبل باشد، بخش C در شکل بیانگر آن است که همان نتایج A با مقدار اولیه (۵و۵) به دست می‌آید در حالی که با مقدار اولیه (۱۰و۱۰) یک راهکار کنترلی متناوب لازم است تا سیستم به تعادل برسد (شکل ۱–D). در مجموع می‌توان دریافت که با مقادیر اولیه مختلف و آستانه های متفاوت، ملزم به اتخاذ راهکارهای مختلف کنترلی هستیم. آنالیز مشابه با استفاده از مدل ۱۹ به نتایج نشان داده شده در شکل ۲ منتج می‌شود.

۱. Augmentation که خود شامل دو حالت رهاسازی تقویتی inoculative release و رهاسازی انبوه mass-release یا inundation می‌باشد.



شکل ۲– اثر مقادیر اولیه و سطوح مختلف آستانه اقتصادی بر راهکارهای مدیریت تلفیقی بر اساس مدل ۱۹

در اینجا با لحاظ مقادیر $r=1.9$, $T=100$, $T_h=1$, $K=50$, $\tau=10$, $q_2=0.2$, $\delta=0.4$, $\alpha=0.0006$، مدل ۱۹ دارای نقطه تعادل مثبت پایدار $E_2=(17.57,20.75)$ می‌باشد. جواب نشان داده شده در بخش A شکل ۲ با مقدار اولیه $(H_0,P_0)=(1,10)$ بیانگر آن است که جواب دستگاه پس از یک بار کنترل تلفیقی به E_2 میل می‌کند ولی با تغییر مقدار اولیه به $(H_0,P_0)=(10,7)$، جواب دستگاه در بخش B شکل ۲ نشان می‌دهد که جمعیت میزبان بی‌نهایت بار طغیان خواهد داشت و لذا یک کنترل تلفیقی متناوب در این حالت لازم است. اما چنانچه جمعیت اولیه پارازیتوئید به ۲۰ افزایش یابد جواب دستگاه بدون اثر تکانشی بوده و مستقیما به E_2 می‌رسد (بخش C شکل ۲). در این حالت مشاهده می‌شود که دشمنان طبیعی می‌توانند طغیان میزبان را با موفقیت فرونشانده و یک سیستم پایدار میزبان–پارازیتوئید ایجاد کنند. حال اگر جمعیت اولیه پارازیتوئید باز هم افزایش و به ۴۰ برسد، بخش D شکل ۲ بیانگر آن است که یک راهکار کنترل متناوب لازم است تا جمعیت میزبان کاهش یابد و از خسارت اقتصادی جلوگیری به عمل آید. این نتیجه موید اینست که رهاسازی اشباعی پارازیتوئیدها ضرورتا در کنترل حشرات آفت مفید نیست.

مثال فوق تنها یک نمونه از کاربرد مدل‌های ریاضی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های میزبان–پارازیتوئید است که می‌تواند اطلاعات مفیدی را در زمینه شرایط حصول سیستم‌های پایدار در زمان در اختیار قرار دهد. با نگرش دقیق‌تر به سیستم‌های دلخواه و اعمال تغییرات در هر بخش از مدل‌های موجود در منابع همچون مدل ۱۸ و ۱۹ و با استفاده از رویکردهای معرفی شده در بخش اول مقاله می‌توان به مدل‌هایی که سیستم مورد نظر را به نحو بهتری توصیف کنند دست یافت. در مجالی دیگر، رویکردهای تحلیلی، تجربی و یا تجربی–تحلیلی مورد استفاده توسط ابداع کنندگان مدل‌های مختلف موجود در زمینه شکارگری و پارازیتیسم از قبیل لوتکا–ولترا، نیکولسون–بیلی، هولینگ، ایولف–گاوس[1]، رویاما[2]، وات، تامسون–استوی[3] و هسل–وارلی[4] و نقش آفرینی یا عدم نقش آفرینی آن‌ها در افزایش آگاهی از برهم کنش‌های شکار–شکارگری یا میزبان–پارازیتیسم و همچنین دخل و تصرف‌های صورت گرفته در آن‌ها توسط متاخرین آن‌ها بر اساس مقاله کلیدی رویاما ۱۹۷۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تشکر و قدردانی

از استاد گرامی، جناب آقای دکتر غلامرضا رکنی لموکی به دلیل ارائه پیشنهادهای ارزنده برای بهبود کیفیت مقاله تشکر و قدردانی می‌شود. همچنین از محقق محترم Sanyi Tang به دلیل اجازه استفاده عینی از فرمول‌ها و شکل‌های موجود در مقاله ایشان در مقاله حاضر تشکر می‌شود.

1. Ivlev-Gause
2. Royama
3. Thompson-Stoy
4. Hassell- Varley

منابع

1. Beddington, J.R., Free, C.A. and Lawton, J.H., 1975. Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations. *Nature*, 255(5503), pp.58-60.
2. Carey, J.R., 2001. Insect biodemography. *Annual review of entomology*, 46(1), pp.79-110.
3. Gause, G. F. 1934. The struggle for existence. 123-147.
4. Holling, C.S., 1959. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. The canadian entomologist, 91(7), pp.385-398.
5. Lotka, A.J., *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore,(New York, 1925). Reprinted in 1956 as Elements of Mathematical Biology.
6. Nicholson, A.J. and Bailey, V.A., 1935. The balance of animal populations.
7. Riemschneider, R., 1954. Configuration et action de certains insecticides. Examen Stéréochimique et toxicologique d’analogues du DDT. Chim. Ind, 72, p.261.
8. Royama, T.,1971.A comparative study of models for predation and parasitism.Population Ecology,13, pp.1-91.
9. Schmalhausen, I.I., 1949. Factors of evolution: the theory of stabilizing selection.
10. Stern, Vernon M. 1973. Economic thresholds. 259-280.
11. Tang, S. and Cheke, R.A., 2008. Models for integrated pest control and their biological implications. *Mathematical Biosciences*, 215(1), pp.115-125.
12. Van Driesche, R. and Bellows Jr, T.S., 2012. Biological control. Springer Science & Business Media.
13. Van Lenteren, J.C., 2000. Success in biological control of arthropods by augmentation of natural enemies. In Biological control: measures of success (pp. 77-103). Dordrecht: Springer Netherlands.
14. Volterra, V., 1926. Variazioni e fluttuazioni del numero d›individui in specie animali conviventi. Società anonima tipografica» Leonardo da Vinci».
15. Watt, K.E.F., 1959. A mathematical model for the effect of densities of attacked and attacking species on the number attacked. The Canadian Entomologist,91(3), pp.129-144.
16. Watt, K.E., 1961. Mathematical models for use in insect pest control. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 93(S19), pp.5-62.
17. Watt, K.E., 1960. The effect of population density on fecundity in insects. The Canadian Entomologist, 92(9), pp.674-695.