

دیدگاه، ابتکار، و ترفندهای خلاقانه اویلر، لاگرانژ و پوانکاره مثال‌های مفهومی ملموس

سعید رنجبر

دکترای ریاضی و پژوهشگر ریاضی محض، دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی،
پژوهشگر مؤسسه تحقیقات قلب و عروق بیمارستان مدرس و مرکز پزشکی دانشگاه ماستریخت، ماستریخت، هلند
sranjbar28@gmail.com

نامه علوم پایه شماره ۱۵، بهار و تابستان ۱۴۰۴

چکیده

در این مقاله به بررسی برخی از دیدگاه‌های ویژه، ایده‌های ابتکاری و خلاقانه اویلر، لاگرانژ و پوانکاره حول سه مساله ملموس و پرمحتوا می‌پردازیم. اویلر یک ترکیب جبری ارایه می‌کند که در بسیاری از زمینه‌ها در حوزه‌های گوناگون علوم و مهندسی کارایی دارد. لاگرانژ مسئله بسیار دشوار چند جرمی را در قالب تئینی‌های تابع پتانسیل قرار می‌دهد و در نهایت پوانکاره راهی برای کاهش و ساده سازی دینامیک و مطالعه پایداری بدست می‌دهد. در این مقاله نشان داده می‌شود که گونه این سه دیدگاه و خلاقیت ریاضی در مطالعه دینامیک قلب در کنار هم قرار می‌گیرند.

کلید واژگان: اویلر، لاگرانژ، پوانکاره، آنالیز بی‌نهایت‌ها، مسئله سه جسم، نگاشت برشی، تصویرسازی از قلب

۱. مقدمه

رویت شود. در این هنگام است که نقطه ما دوباره بروی مقطع پوانکاره است. این همان نگاشت پوانکاره است. در انتها اشاره‌ای به بررسی نگاشت پوانکاره برای سیستم دینامیک بطن چپ قلب انسان داریم. و با نگاهی دقیق به میدان‌های برداری بروی یک خمینه هموار با کرل^۴ صفر در صفحه مختصات دکارتی سه-بعدی، و ارتباط آن را با گروه نخست دورام کوهمولوژی^۵ و تعداد حفره‌های یک-بعدی بروی همین خمینه هموار، روشن می‌کنیم.

۱. مساله اول و نگاه اویلر به آن

سری‌های توانی، توابع جبری، و توابعی که موضعی جبری هستند حاصل ضرب نامتناهی زیر را در نظر بگیرید:

$$(1 + x^a z)(1 + x^b z)(1 + x^c z)(1 + x^d z)(1 + x^e z) \dots$$

این حاصل ضرب که دقیقاً به صورت ضرب عوامل خطی از درجه یک به روی خط مختلط و یا دایره مختلط هستند را به فرمت زیر نگاه می‌کنیم: در این بسط که به صورت مجموعی نامتناهی است،

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \dots$$

نگاه نخست و دقیق اویلر، به فرمت توابع به شکل سری‌های توانی بر روی دایره مختلط دوخته شده است. نگاه دیگر اویلر، که در موازای نگرش نخست وی است، به ضرایب آن سری‌های توانی و

مساله اول حاصل ضرب نامتناهی‌ایی از فاکتورهای خطی از درجه اول است که اویلر^۱ با نگاه به فرمت مجموع توانی این حاصل ضرب و بررسی دقیق ضرایب موجود در آن سری توانی، نتایج بسیار عمیق و شگرفی را به دست می‌آورد. مسئله دوم موضوع سه جسم مشهور است. اگر سه جرم M^1 و M^2 و m داشته باشیم و m جرمش نسبت به M^1 و M^2 خیلی خیلی کوچک باشد و در مدارهای میدان جاذبه‌ی جرم‌های M^1 و M^2 قرار گیرد، در چه نقاطی جرم m در حالت سکون و پایدار قرار خواهد گرفت. این نقاط به نقاط تعادل لاگرانژ^۲ معروفند. لاگرانژ وجود این نقاط و وضعیت آنها را بعنوان نقاط تکیه «تابع انرژی پتانسیل» بررسی نمود و سطوح تراز آن تابع پتانسیل را با دقت، شرح و بسط داد. اویلر نیز کوشش‌های بسیاری در حل مساله سه جسم دارد اما دیدگاه لاگرانژ یعنی توجه به نقاط بحرانی تابع پتانسیل، کلید حل مساله است. در مساله سوم به بررسی مفهوم بسیار جدی، عمیق و ژرف نگاشت پوانکاره^۳ می‌پردازیم که اولین بار توسط هانری پوانکاره معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. اگر یک شیئی هندسی دینامیک داشته باشیم و حرکت آن را در گذر زمان نگاه کنیم و به دنباله‌ای پیوسته از خمینه‌های هموار می‌رسیم. اولین خمینه در این دنباله، مقطع پوانکاره نام گذاری می‌شود که خود یک خمینه است. نقطه‌ای را از مقطع پوانکاره در نظر گیرید و آن نقطه را در پی خمینه‌های ذکر شده دنبال کنید تا وقتی که شکل شیئی هندسی

1. Leonardo Euler
2. Joseph-Louis Lagrange
3. Henry Poincare

4. Curl
5. De Rham Cohomology

محاسبه دقیق ضرایب و تحلیل آنها معطوف شده است.

در این بسط که به صورت مجموعی نامتناهی است، نگاه نخست و دقیق اویلر، به فرمت توابع به شکل سری‌های توانی بر روی دایره مختلط دوخته شده است. نگاه دیگر اویلر، که در موازای نگرش نخست وی است، به ضرایب آن سری‌های توانی و محاسبه دقیق ضرایب و تحلیل آنها معطوف شده است.

در این بسط، ضریب P برابر با مجموع توان‌های $x^{\varepsilon}, \dots, x^{\sigma}, x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\lambda}$ می‌باشد. ضریب Q به صورت مجموع آن توان‌هایی از x هستند که به صورت مجموع دو جمله نابرابر $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ هستند. و همین طور ضریب R مجموع آن توان‌هایی از x را دربرمی‌گیرند که به صورت مجموع سه ترم نابرابر از دنباله $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ هستند و ضریب S به صورت مجموع آن توان‌هایی از x مرتب می‌شوند که مجموع ۴ ترم نابرابر از $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ هستند. به عبارتی ضرایب سری توانی فوق از کنار هم قرار دادن توان‌های x به صورت مجموع دو جمله نابرابر، سه جمله نابرابر، چهار جمله متفاوت از $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ به دست می‌آیند.

اویلر با نگاه کردن و توجه به آنچه که در کنار توان‌های x و Z در بسط فوق ظاهر می‌شوند به نتایجی عمیقی دست می‌یابد.

اویلر آنچه را که کنار $Z, Z^2, Z^3, Z^4, \dots$ ظاهر می‌شوند، به طور دقیق محاسبه و تحلیل می‌کند.

کنار Z^1 ، آن توان‌هایی از یکس هستند که تنها به یک طریق با حروف $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ نمایش داده می‌شوند. و کنار Z^2 ، هر توان یکسان از x ، معادل با مجموعی از دو جمله نابرابر از $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ هستند. و کنار Z^3 ، هر توان یکسان x متناظر با مجموعی از سه ترم نابرابر از حروف $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ می‌باشد. و همین طور کنار Z^4 ، هر توان یکسان x متناظر با مجموعی از چهار ترم نابرابر از حروف $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ هست. و کنار Z^5 ، هر توان یکسان x متناظر است با مجموع پنج ترم نابرابر از حروف $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ قرار دارند.

برای مثال در سری توانی فوق کنار Z^{11} ، هر توان یکسان x که ظاهر می‌شود با مجموعی از یازده جمله نابرابر از $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ معادل می‌شود (نتیجه‌ای غیر منتظره).

اینک به این نتیجه بسیار عمیق و شگرف توسط اویلر می‌رسیم که اگر در مقدار Q, Nx^n مشاهده و پیدا شود بدین معناست n را به N طریق مختلف می‌توان به صورت مجموع دو جمله نامساوی از $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ نوشت. و اگر در مقدار R, Nx^n مشاهده گردد بدین معنا است که n را می‌توان به N طریق مختلف که به صورت مجموع سه ترم نابرابر از حروف $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ نمایش داد. اگر در مقدار S, Nx^n مشاهده گردد بدین معناست که n را

می‌توان به N طریق مختلف به صورت مجموع چهار ترم مختلف از $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ نوشت. در فرمت بسط سری توانی حاصلضرب نامتناهی فوق، کنار Z^m ، ضریب N ایی که در جمله Nx^n ظاهر می‌شود بدین معناست که n را می‌توان به N طریق مختلف به صورت مجموع m ترم نامساوی $\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda, \sigma, \dots$ نمایش داد (یک نتیجه شگرف و دیدگاهی ویژه از اویلر).

در ادامه برای اینکه این نتیجه عمیق را روشن‌تر ببینیم حاصلضرب نامتناهی زیر، بر گرفته از [۱]، را در نظر می‌گیریم:

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\dots$$

اویلر این حاصل ضرب را به طور دقیق به صورت جبری بسط داد [۱]. از سری‌هایی که در باز کردن این حاصل ضرب نامتناهی فوق به دست می‌آیند، تعداد طرق مختلف را نتیجه می‌گیرد که می‌توان یک عدد دلخواه را به صورت مجموع m ترم مختلف از اعداد یک، دو، سه، چهار، پنج و الی آخر نوشت. این امر با نگاه کردن به آنچه که کنار Z^m ظاهر می‌شود نتیجه گرفته. در حقیقت به ضریب توان Z^n توجه باید کرد. برای مثال در می‌یابیم که عدد سی و پنج را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع هفت عدد متفاوت نوشت. در بسط فوق در وهله اول به آنچه که کنار Z^7 ظاهر می‌شود نگاه می‌کنیم و در وهله دوم به آنچه که کنار x به توان سی و پنج نمایان می‌شود. جواب سوال همین است، یعنی به پانزده شکل می‌توان عدد سی و پنج را با مجموع هفت عدد مختلف توصیف کرد (این نگاه و این نتیجه و متدولوژی اویلر حیرت انگیز، قابل تعمیم و بنیادین است).

اویلر با در نظر گرفتن $Z=1$ در حاصل ضرب نامتناهی فوق به حاصلضرب زیر رسید [۱]:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\dots$$

باز کردن این حاصل ضرب به صورت مجموع و کنار هم قرار دادن توان‌های یکسان x و محاسبه ضرایب آنها، اویلر را به این نتیجه رساند که ضریب توان خاصی از x مشاهده شده در سری بالا، تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان آن توان را بصورت مجموع‌های با ترم‌های مختلف ۱، ۲، ... مانند زیر [۱] نوشت، بیان می‌کند.

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \dots$$

برای مثال ضریب x^8 در بسط فوق که بصورت یک سری نامتناهی ست، شش است و این بدان معنا است که عدد هشت را به شش طریق ممکن می‌توان به صورت مجموع ترم‌های متفاوت یک، دو، سه، پنج، شش، هفت و هشت نمایش داد:

$$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$$

پیشرفته کنونی نیز بسیار حائز اهمیت هستند و مصداق‌های بسیار مفهومی و معناداری در تعامل مفاهیم بسیار مجرد ریاضی با شاخه‌های علوم دیگر مانند فیزیک، زیست‌شناسی، کامپیوتر و پزشکی دارند (در بخش مربوط به هانری پوانکاره در همین مقاله دوباره به ارزش این موضوع که در تشکیل تصاویر قلبی و عروقی بهره گرفته می‌شود، اشاره می‌کنیم).

۲. مسأله دوم و نگاه لاگرانژ به آن

سه جسم و نقاط تکین تابع پتانسیل لاگرانژ یا همان نقاط تعادل لاگرانژ

سه جرم M_1 و M_2 و m را در نظر بگیرید: جرم m بسیار نسبت به اجرام M_1 و M_2 کوچک است (تداخلی در مدارهای میدان جاذبه‌ی M_1 و M_2 با انتقال کوچک جرم m به وجود نمی‌آید)؛ و جرم m در مدارهای جاذبه‌ی جرم M_1 و M_2 قرار می‌گیرد. سوال این است که جرم m در کدام نقاط در میدان‌های جاذبه M_1 و M_2 در حالت سکون و پایدار خواهد بود.

به عنوان مثال کره زمین و کره ماه را به عنوان دو جرم سنگین در نظر بگیرید و جرم سوم ماهواره‌ای باشد که قرار است در این نقاط تعادل قرار داده شود. آیزاک نیوتن مسأله بررسی و تعیین معادلات حرکت دو جرم بزرگ مثل کره زمین و خورشید را به طور دقیق انجام داد. در مسأله دو جسم، معادله حرکت مرکز جرم‌ها و معادله حرکت هر کدام از دو جرم نسبت به نیروی گرانش که به هم وارد می‌کنند بررسی می‌شوند. به عبارتی مسأله دو جسم را می‌توان چنین بیان کرد که حرکت هر کدام از این دو جرم تحت تاثیر میدان جاذبه مرکز جرم‌ها چگونه است. در واقع مسأله دو جسم، به تعیین معادله حرکت جسمی که در مرکز جرم‌های دو جسم M_1 و M_2 با جرم $(M_1+M_2)/(M_1+M_2)$ قرار دارد، کاهش می‌یابد. مسأله سه جسم نیز، بررسی معادله حرکت جرم m وقتی که در میدان جاذبه مرکز جرم دو جسم دیگر قرار می‌گیرد، است. پس جرم m تحت تاثیر میدان گرانش دو جسم دیگر قرار می‌گیرد. دو جسم با اجرام بزرگ M_1 و M_2 را در صفحه دستگاه مختصات XOY، بروی محور X ساکن فرض می‌کنیم. و نیز سرعت زاویه ای دستگاه مختصات را حول مرکز جرم M_1 و M_2 در راستای محور Z، عدد ω در نظر می‌گیریم. در اینجا باید معادله حرکت جرم m را در این دستگاه مختصات به دست آوریم. همه مولفه‌هایی را که داریم یکبار دیگر با جزییات می‌نویسیم و بازبینی کنیم. جرم کوچک m ، جرم‌های بزرگ M_1 و M_2 ، مرکز جرم M_1 و M_2 (با جرم M_1) $(M_1+M_2)/(M_1+M_2)$ ، مختصات M_1 و M_2 که بروی محور X ثابت فرض شدند (مرکز جرم، مسافت بین دو جسم M_1 و M_2 را به قسمت‌هایی تقسیم می‌کند که با اجرام M_1 و M_2 تناسب است) و سرعت زاویه‌ایی که مقدار آن امگا است، (شکل ۱).

در ادامه اوایلر برای اینکه شرط نوشتن مجموع‌ها را با ترم‌های متفاوت بردارد، آن حاصلضرب نامتناهی را در مخرج قرار می‌دهد. به عبارت دیگر به آن حاصلضرب نامتناهی به صورت یک تقسیم نامتناهی نگاه می‌کند. در این ترفند هوشمندانه، اوایلر توان‌های یکسان x را در این تقسیم نامتناهی کنار هم قرار می‌دهد و مقدار به دست آمده برای توان‌های ظاهر شده x در بسط تقسیم نامتناهی آن، نشان دهنده تعداد طریقه‌هایی است که آن توان را به صورت مجموع اعداد یک، دو، سه و ... بیان می‌کند. تمام آنچه که در بالا صحبت شد را می‌توان بروی حاصل تقسیم نامتناهی زیر به طور کامل و دقیق اجرا کرد [۱].

$$\frac{1}{(1-x^\alpha z)(1-x^\beta z)(1-x^\gamma z)(1-x^\delta z)(1-x^\epsilon z)\dots}$$

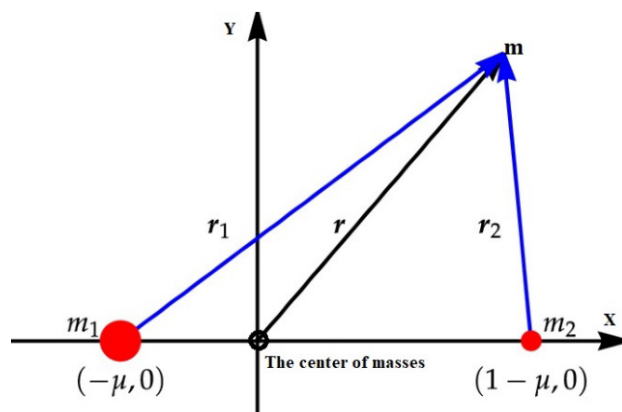
بحثی حول مسأله اول

دیدگاه اساسی اوایلر در این مسأله همان طور که اشاره شد در نظر گرفتن توابع، به صورت سری‌های توانی بروی خط مختلط و یا دایره مختلط است. در آن زمان و حتی در حال حاضر، توابع، به صورت چند جمله‌ای و توابع گویا (تقسیم دو چند جمله از درجه‌های یکسان یا مختلف با ضرایب مختلط)، تابع‌های سینوسی، کوسینوسی، تانژانت و توابع ارک سینوس و ارک تانژانت و توابع نمایی و لگاریتمی در نظریه توابع و مطالعه توابع و رفتار آنها چه در حالت موضعی و چه در حالت سراسری نقش اساسی دارند. اینکه بتوان تابعی را به صورت یک چند جمله‌ای با تعداد متغیرهای متفاوت نوشت مفهوم جبری بودن آن تابع را می‌رساند. اگر بتوان تابعی را به صورت موضعی به صورت یک چند جمله‌ای با چند متغیر نشان داد بیانگر این است که این تابع موضعی-جبری است. اگر بتوان تابعی را به طور موضعی به صورت سری‌های توانی و نامتناهی نوشت همان مفهوم نوشتن بسط سری تیلور آن تابع حول یک نقطه (مخصوصاً حول نقاط تکین) است.

اوایلر در بررسی توابع جبری و یا توابعی که موضعا جبری هستند، دیدگاه اصلی‌اش این است که آن توابع به صورت سری‌های توانی و یا بسط حاصلضرب‌های نامتناهی با عامل‌های خطی درجه یک و یا درجه دو بروی دایره نمایش داده شوند و نیز بررسی ضرایب به دست آمده در آن مجموع‌های نامتناهی است.

اوایلر این توابع را به طور دقیق بروی خط مختلط و نیز دایره مختلط بررسی می‌کند و به نتایج بسیار شگرفی می‌رسد. وی در حالت‌ها و نقطه‌های خاص بروی یک دایره مختلط، مقادیر توابع ذکر شده را با دقت بسیار بالا محاسبه می‌کند.

نکته عمیق جالب توجه این است که مطالعه و نگاه به چنین توابعی (دارای نمایش سری توانی) در همسایگی یک نقطه در حسابان



شکل ۱. دو جسم بزرگ با جرم‌های زیاد و یک جسم کوچک با جرم کم.

جرم M_1 و M_2 در با جرم در مبدا مختصات قرار دارد. و جرم‌های M_1 و M_2 با جرم $\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ در مبدا مختصات قرار دارد. و جرم‌های M_1 و M_2 را بروی محور ایکس‌ها در نقاط زیر در نظر می‌گیریم:

در شکل شماتیک فوق اجرام M_1 و M_2 بروی محور مختصات در حالت سکون هستند و دستگاه مختصات با سرعت زاویه‌ای ω حول محور زی عمود بر این دستگاه در حال حرکت است. مرکز

$$-\mu = x_1 = -\left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)a$$

$$1 - \mu = x_2 = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)a$$

عمومی نیوتن، قانون دوم نیوتن و نیروی جانب به مرکز عبارت‌اند از:

که a فاصله بین اجرام M_1 و M_2 است. مولفه‌های نیرو، در معادله حرکت جرم m در صفحه مختصات بالا، براساس قانون جاذبه

$$\ddot{x} = -\left(\frac{M_1 G(x-x_1)}{[x-x_1]^2 + y^2 \frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{M_2 G(x-x_2)}{[x-x_2]^2 + y^2 \frac{3}{2}}\right) + ((M_1 + M_2)Gx/a^3) + 2\omega \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\left(\frac{M_1 G(x-x_1)}{[x-x_1]^2 + y^2 \frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{M_2 G(x-x_2)}{[x-x_2]^2 + y^2 \frac{3}{2}}\right) + ((M_1 + M_2)Gx/a^3) + 2\omega \dot{x}$$

نقاط، به طور کامل ذخیره شود! به عبارتی دیگر انرژی پتانسیل در این نقاط باید در حالت قرینه^۱ باشد. برای حل مساله سه جسم، دیدگاه خلاقانه و زیبای لاگرانژ به جای اینکه به ریشه‌های تابع نیرو فکر کند، جستجوی نقاط اکسترمم تابع انرژی پتانسیل بود.

ترفند ماهرانه و پرمعنا لاگرانژ، در بررسی نقاط بحرانی (نقاط تکیه یا همان سینگولار) تابع انرژی پتانسیل است. در این نقاط علامت‌های ژاکوبین^۲ تابع انرژی پتانسیل فوق عوض می‌شوند. تابع انرژی پتانسیل جرم m ، بر حسب انرژی‌های پتانسیل ذخیره شده توسط نیروی ثقل M_1 و M_2 و نیز نیروی جانب مرکز توسط مرکز جرم M_1 و M_2 بروی جرم m (قانون دوم کپلر) به صورت زیر در صفحه ایکس و وای فرمولایز می‌شود:

همان طور که مشاهده می‌کنید معادله حرکت m برحسب مختصات آن در صفحه ایکس و وای و دیگر مولفه‌هایی است که در بند قبل ذکر شدند (G ثابت گرانش عمومی نیوتن است).

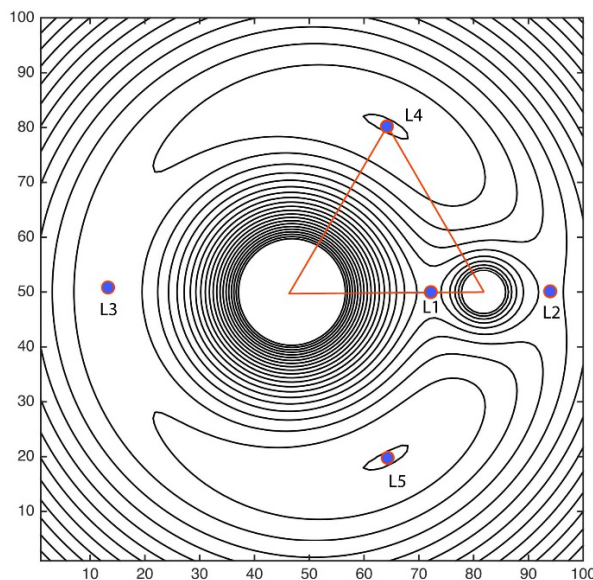
در چه نقطاتی از صفحه ایکس و وای، جرم m در حالت سکون است؟ (یا به عبارتی دیگر مولفه‌های نیرو در فرمول بالا در این نقاط صفر خواهند بود). برای چه مقداری از ایکس و وای دو معادله فوق صفر می‌شوند؟ ریشه‌های معادله حرکت جرم m کدام‌اند؟

بحث حول مساله دوم

در نقاط تعادل، معادله حرکت فوق باید صفر باشد. به عبارتی دیگر نیروی وارد بر جرم m در این نقاط باید صفر باشد. این مقدار نیرو که در معادله حرکت فوق نیز صدق می‌کند باید در جرم m در این

$$P(x, y) = -\left(\frac{M_1 G}{[x-x_1]^2 + y^2 \frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{M_2 G}{[x-x_2]^2 + y^2 \frac{1}{2}}\right) - ((M_1 + M_2)G(x^2 + y^2)/a^3)$$

از نقاط لاگرانژ بروی محور ایکس قرار می‌گیرند که نقاط زینی تابع پتانسیل هستند و سطوح تابع پتانسیل حول این نقاط، به صورت هذلولی در می‌آیند. دو نقطه دیگر لاگرانژ بیرون از خط محور ایکس، نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع پتانسیل هستند و سطوح تابع پتانسیل حول این نقاط، بیضی‌وار هستند. به شکل ۲ و منحنی‌های تراز تابع پتانسیل حول نقاط تعادل لاگرانژ توجه کنید، [۲] و [۳].



شکل ۲: نقاط لاگرانژ L^1 ، L^2 و L^3 بر روی خطی قرار می‌گیرند که جرم‌های M^1 و M^2 را به هم وصل می‌کنند و نقاط زینی تابع پتانسیل $P(x,y)$ هستند. به ترازهای هم پتانسیل حول این نقاط توجه کنید. نقاط دیگر لاگرانژ L^4 و L^5 به عنوان نقاط اکسترمم موضعی تابع پتانسیل لاگرانژ هستند. ترازهای هم پتانسیل برای این نقاط نیز در شکل نشان داده شده‌اند.

فرض کنید تابع هموار f از ناحیه Ω (از فضای R^3) به R^3 باشد و p نقطه‌ای در فضای R^3 باشد که تابع f در نقاط فایبر p سینگولاریتی داشته باشد. درجه تابع در نقطه p بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{degree}(f)_p = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sgn}(\text{Jacobian}(f)_x)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، درجه تابع f برای مقادیر تکین p به صورت تغییرات علامت ژاکوبین تعریف می‌شود. شاخص تابع f به صورت مجموع این درجه برای تمام مقادیر تکین f تعریف می‌شود:

$$\text{index}(f) = \sum_{p \text{ singular}} \text{degree}(f)_p$$

برای مثال تابعی را بروی کره S^2 در نظر بگیرید که به هر نقطه بروی کره یک بردار مماس در همان نقطه تصویر می‌کند. شاخص این میدان برداری مماس بر کره، همان شاخص اویلر برای کره می‌شود که مقدار آن ۲ است. چون شاخص این تابع برابر ۲ است، در مجموع بالا در تعریف شاخص یک جمله باید ناصفر باشد و این

دیدگاه لاگرانژ برای به دست آوردن نقاط تعادل جرم m ، بررسی نقاط بحرانی یا سینگولار تابع انرژی پتانسیل است. وی مشتقات جزئی تابع انرژی پتانسیل رو محاسبه می‌کند و آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهد. لاگرانژ ریشه‌های مشتقات جزئی تابع پتانسیل را به طور دقیق محاسبه می‌کند. تعداد این نقاط پنج تا هستند که به نقاط تعادل لاگرانژ مشهورند. نگاه لاگرانژ در مسأله سه جسم، بروی سطوح انرژی پتانسیل حول این نقاط است. سه تا

بحثی کوتاه در مورد گسترش دیدگاه لاگرانژ در مسأله سه جسم

توجه به نقاط تکین^۱ تابع پتانسیل: نقاطی که مشتقات جزئی تابع پتانسیل لاگرانژ در آنجا تغییر علامت می‌دهند و میدان برداری پتانسیلی حول این نقاط، در حال انقباض یا انبساط هستند، که همان خواص نقاط بحرانی را دارند. بررسی رفتار این میدان برداری حول نقاط تکین آن، مفهوم عمیق تاب خوردن، پیچیدن و تغییر جهت را در ریاضی معرفی می‌کنند. این دیدگاه لاگرانژ نکته‌های مهم و عمیقاً مرتبطی را آشکار می‌کند. مفهوم تغییر علامت مشتقات جزئی یک تابع حول نقاط که همان، تغییر علامت ژاکوبین آن تابع در آن نقاط است. توجه کنید که چنین تغییر علامتی دقیقاً برای نقاط تکین معنا دارد.

معرفی درجه یک میدان برداری به عنوان یک شاخص توپولوژیک و ارتباط آن با شاخص اویلر

برای یک تابع هموار، تغییر علامت تنها برای نقاط تکین معنا دارد و به صورت مجموع علامت‌های دترمینان ماتریس ژاکوبی تابع (یا همان ژاکوبین تابع) به صورت زیر تعریف می‌شود.

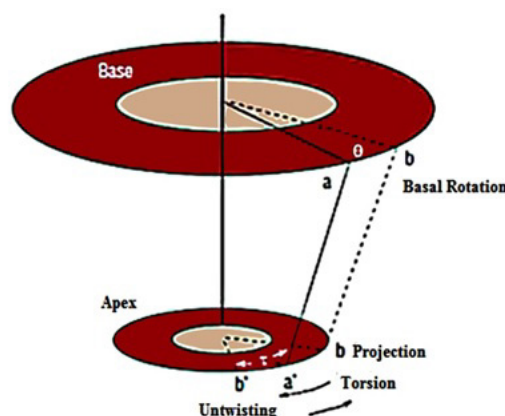
یک منحنی بیضوی شکل را به‌طور جبری انتگرال پذیر گویند، به شرطی که مساحت ناحیه اشتراک آن با یک خط را بتوان به صورت یک چند جمله‌ای ناصفر براساس پارامترهای آن خط نمایش داد. آیزاک نیوتن در حین بررسی «جبری انتگرال پذیری خم‌های هموار بیضوی شکل» به نتیجه فوق العاده‌ای که زیر می‌آید دست پیدا کرد.

قضیه‌ای از نیوتن در باب بطور جبری انتگرال پذیری خم‌های هموار بیضوی شکل

هر خم هموار بیضوی شکل که به طور جبری انتگرال پذیر باشد حتما دارای نقطه‌ای تکین است. به عبارت دیگر، خم‌های هموار بیضوی شکل، به طور جبری انتگرال پذیر نیستند [۴]. به عنوان مثال، طبق قانون دوم کپلر یک سیاره در منظومه شمسی در یک مدار بیضی شکل^۳ حرکت می‌کند که مساحت ناحیه‌ای که توسط بردار شعاعی این سیاره جارو می‌شود متناسب با زمان است. نیوتن معادله حرکت کپلر^۴، بیانگر موقعیت یک نقطه (سیاره)، را به عنوان تابعی از زمان بررسی می‌کند و نشان می‌دهد که این تابعی غیر جبری است که معادله مسیر حرکت آن را نمی‌توان از راه جبری بیان کرد. نیوتن از این مثال به حالت کلی قضیه فوق می‌رسد و این مطلب واقعا شگفت انگیز و کاملا غیر بدیهی^۵ به دست می‌آورد، [۴] و [۵]. مفاهیم عمیق و پرمحتوای سری‌های فوریه، مفهوم شاخص یک میدان برداری، توابع بسل و همچنین مباحثی اصولی و بنیادین در نظریه توابع مختلط، همگی مطابق آنچه در اینجا بیان شد از معادله کپلر سرچشمه می‌گیرند.

در ادامه، ایده‌های ناب و اصلی آیزاک نیوتن در اثبات قضیه فوق را شرح می‌دهیم. نقطه‌ای را داخل سطح محصور شده توسط خم هموار بیضوی شکل در نظر بگیرید. اگر این خم هموار جبری-انتگرال‌پذیر باشد، با توجه به شکل ۴، باید بتوان ناحیه مورد نظر داخل خم بیضوی شکل را به‌صورت یک چندجمله‌ای ناصفر بر حسب $\tan t$ نوشت. با حرکت مداوم بروی این خم، در هر بار دور زدن، این ناحیه، مقدار جدیدی پیدا می‌کند. به عبارتی دیگر این ناحیه، بی‌نهایت مقدار جدید را در هر دور به خود می‌گیرد بنابراین چندجمله‌ای فوق در صورت وجود باید بی‌نهایت ریشه داشته باشد، در صورتی که یک چندجمله‌ای ناصفر تعداد ریشه‌هایش بیشتر از درجه آن نیست. در نتیجه ناحیه نشان داده شده در شکل جبری نیست و همین طور ثابت شد که یک خم هموار بیضی شکل نیز به طوری جبری انتگرال پذیر نخواهد بود.

بدان معنا است که این تابع حداقل دارای یک مقدار تکین است. یعنی هر میدان برداری مماس بروی S^2 حتما یک جا صفر می‌شود. به عبارت دیگر، نمی‌توان بردارهای مماس بروی کره S^2 را به صورت پیوسته حرکت داد، یا میدان برداری هموار مماس همه جا ناصفر بر S^2 وجود ندارد. این قضیه‌ای از هانری پوانکاره است. به عنوان مثالی دیگر در حوزه پزشکی، میدان برداری نیرو را برای عضله داخلی بطن چپ در یک سیکل قلبی در نظر بگیرید، درجه این میدان برداری، تعداد پیچ و تاب خوردن آن نسبت به محور اصلی قلب است (محور اصلی قلب، خطی است که سر قلب^۱ را به وسط دریچه میترال متصل می‌کند، شکل ۳).



شکل ۳. تصویری شماتیک از نحوه بررسی پیچ خوردن سر قلب حول محور بطن چپ قلب است.

حضور اوایلر، لاگرانژ و ژاکوبی در این مفاهیم مشهود است. تعاملی که افکار آنها با هم دارند قابل توجه است. البته بسیاری از افکار بزرگانی چون کپلر، نیوتن، آیزاک بارو، کوشی و پوانکاره در این مفاهیم بنیادین و نیز مدرن دیده می‌شوند.

معادله تابع پتانسیل جرم m که در بالا صریحا آورده شد گویای عمق همین مطالب است. در هر ترم در معادله پتانسیل فوق، هم نام این بزرگان دیده می‌شود و هم گویای مفاهیم حائز اهمیتی هستند که سال‌های سال، کوشش و تراوشات هوش بشری و ارتباطات این دیدگاه‌های بی‌نظیر را نشان می‌دهند. از گذشته تاکنون، ارتباطات هندسی، جبری، آنالیز مدرن، اصول، تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی و بنیادی، وحدتی در عین کثرت را نشان می‌دهند. دل هر ذره را که بشکافی آفتابیش در میان بینی^۲. آیا لاگرانژ قبل از محاسبه نقاط تعادل و بررسی آنها چطور از وجود نقاط تعادل در مساله سه جسم آگاه بود؟

1. Heart Apex

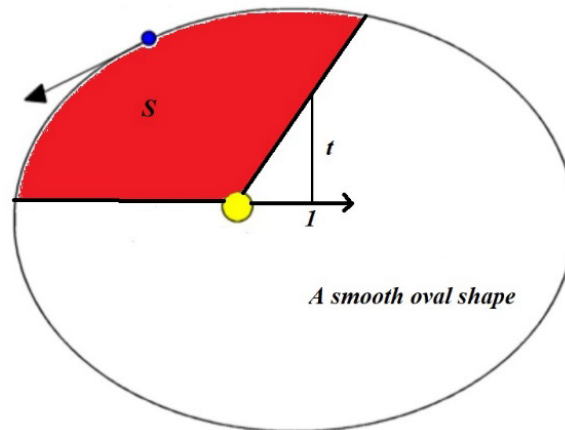
3. Ellipse orbit

۴. معادله کپلر به فرم $x \sin x = t$ است. در زمان نیوتن یعنی جواب این معادله بصورت سری‌های توانی با شعاع همگرایی ε مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گرفتند کوشی بررسی‌های

۲. هاتف اصفهانی، دیوان اشعار، ترجیع بند - که یکی هست و هیچ نیست جز او

عمیقی در آنالیز مختلط درباره این ثابت عجیب انجام داده است.

۵. ارتباط جبری انتگرال پذیری با نقاط تکینی



شکل ۴. ناحیه قرمز رنگ که توسط نقطه‌ای داخل منحنی مسیر معادله کپلر جاروب می‌شود، به طور جبری انتگرال پذیر نیست.

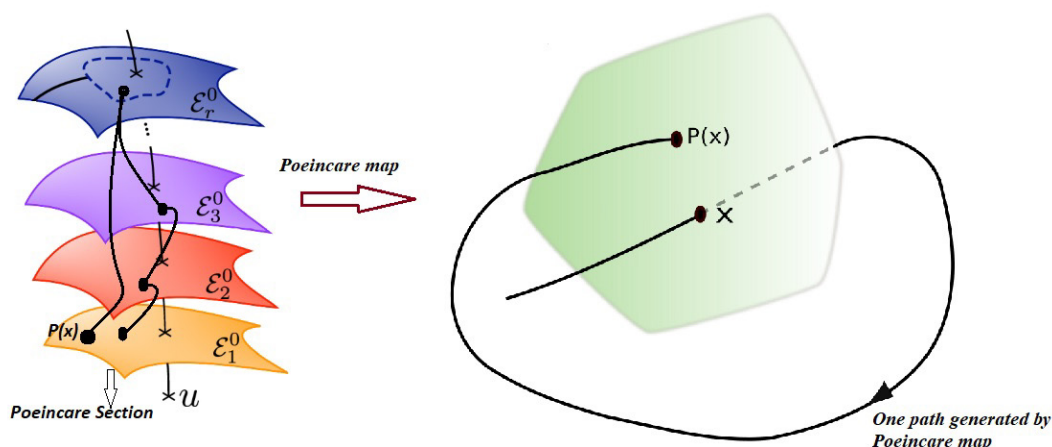
می‌شود. نقطه‌ای را روی مقطع پوانکاره در نظر بگیرید مانند x و این نقطه را در خمینه‌های دیگر در یک سیکل، ردیابی کنید. در انتها، این نقطه با گذر از خمینه‌های دیگر دوباره به نقطه‌ای بروی مقطع پوانکاره می‌رسد؛ این نقطه را $p(x)$ می‌نامیم. این همان نگاشت پوانکاره است. به دست آوردن خم‌های ایجاد شده از این ردیابی، برای هر نقطه در مقطع پوانکاره، ضابطه نگاشت پوانکاره را برای آن سیستم دینامیکی به دست می‌دهد. اهمیت بررسی نگاشت پوانکاره برای یک سیستم در حالت حرکت در یک دوره تناوب مشخص، این است که برای دنبال کردن هر نقطه از مقطع پوانکاره، تنها نباید تصویر (سایه) حرکات این نقاط را بروی صفحه‌های عمود بر هم نگاه کنیم، زیرا در صورت تأخیر در حرکت، از یک خمینه به خمینه دیگر ممکن است سایه‌های ایجاد شده در آن صفحات دکارتی با آشفتگی بالا باشند و اطلاعات چندانی از نحوه و معادله حرکت نقاط، در بر نداشته باشند (شکل ۵).

بالعکس، معادله تابع انرژی پتانسیل لاگرانژ جرم m در صفحه XOY به طور جبری انتگرال پذیر است، زیرا سطوح تراز تابع انرژی پتانسیل لاگرانژ هموار و پیوسته می‌باشند و خم‌های جبری انتگرال پذیرند. در نتیجه، بنابر قضیه فوق از نیوتن، این تابع پتانسیل لاگرانژ باید دارای تکنیکی باشد. لاگرانژ با توجه به بررسی سطوح تراز تابع انرژی پتانسیل، شکل، و آگاهی از این قضیه نیوتن از وجود چنین نقاط تعادلی کاملاً با خبر بوده.

۳. نگاشت برشی و دیدگاه پوانکاره

گسسته سازی، فروگاهی دینامیک و محاسبات

خمینه‌های همواری را پشت سر هم، با مشخصه یک شکل هندسی دینامیک در یک سیکل زمانی، در نظر بگیرید. اولین خمینه، تصویر اولیه شیء هندسی متحرک ماست که مقطع پوانکاره نام گذاری



شکل ۵. خمینه‌های پشت سر هم و مقطع پوانکاره (سمت چپ تصویر)، مسیر طی شده توسط یک نقطه در مقطع پوانکاره (سمت راست). منحنی‌های به دست آمده از نقشه پوانکاره علاوه بر ساخت ضابطه پوانکاره در مطالعه هندسه شیء متحرکی که از کنار هم قرار دادن خمینه‌های پشت سر هم ظاهر می‌شود، اهمیت دارند.

۴. نگاشت پوانکاره و تصاویر قلبی و عروقی

نگاشت پوانکاره و کل مکانیک و ریاضیات برای تصویر سازی دینامیک قلب

قلب انسان به عنوان یک شیء سه بعدی در حال تپش و حرکت پیوسته در یک سیکل مشخص است. سیستم‌های تصویر برداری متفاوتی برای نشان دادن تصاویر قلبی و حرکت آن در حین انقباض و انقباض قلب، مانند: سیستم‌های اکوگرافی و ام آر آی وجود دارند. در این مقاله، قلب، به عنوان یک سیستم دینامیکی، توسط تصاویری که براساس امواج التراسوند (فراصوتی) ساخته می‌شوند، در نظر گرفته می‌شود. اولین تصویری که از قلب مشاهده می‌شود مقطع پوانکاره ماست.

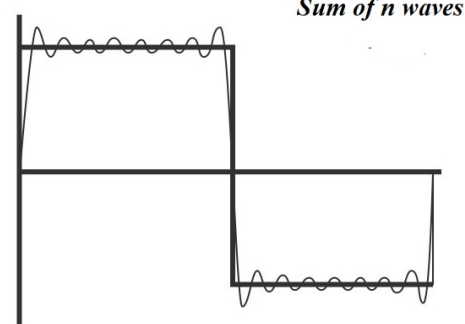
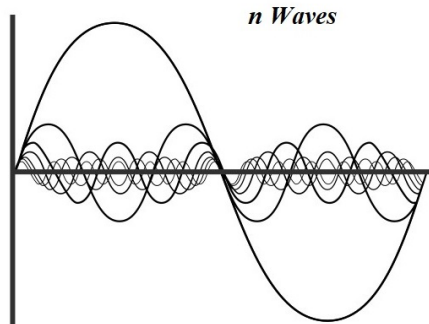
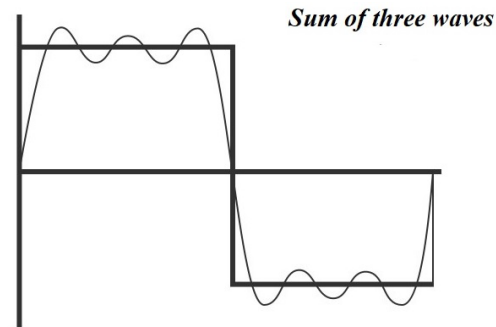
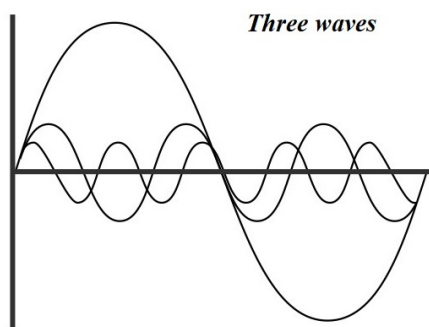
گام‌های هفت گانه: گام به گام با نگاشت پوانکاره برای بازسازی کامل حرکت قلب، نقطه به نقطه

۱،۴. گام اول

امواج فراصوتی با فرکانس f_0 به ناحیه‌ای از بخش عضلانی داخلی بطن چپ فرستاده (پراکنده) می‌شوند. امواج با برخورد به آن ناحیه با زاویه تتا و با فرکانس f_{Dop} باز می‌گردند. داپلر ریاضی‌دانی فرانسوی، سرعت آن ناحیه را پس از بازگشت امواج التراسوند بصورت فرمول زیر محاسبه می‌کند:

$$v = \left(\frac{2f_{Dop}c}{f_0 \cos \theta} \right)$$

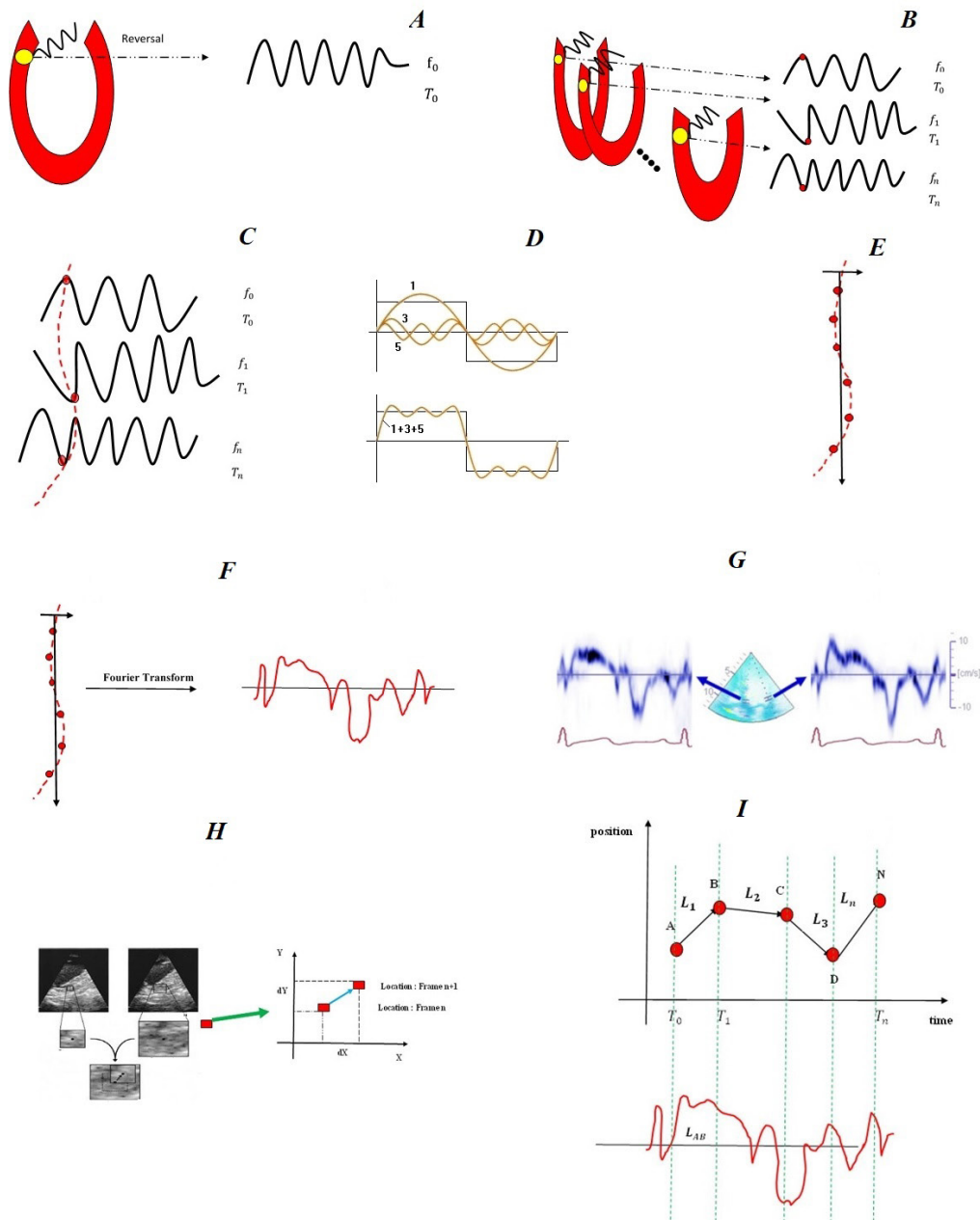
f_{Dop} فرکانس امواج بازگشتی و f_0 فرکانس موج پراکنده شده و θ زاویه بین امواج رفت و برگشتی است. با تغییر تتا (تغییر زاویه بازگشتی امواج) و سرعت محاسبه شده توسط معادله داپلر، برای هر نقطه از بطن چپ در یک سیکل قلبی، سری‌های توانی (بسط‌های فوریه) سرعت هر نقطه بطن چپ به دست می‌آیند (شکل ۶) که منجر به ساخت تصاویر اولیه (اورجینال) بطن چپ قلب می‌شوند (شکل ۷).



شکل ۶. امواج سینوسی و کوسینوسی با فرکانس‌های متفاوت نشان دهنده حرکت بروی دایره واحد و چند بار چرخیدن به دور آن (سمت چپ تصویر)، و مجموع این امواج با یک سری توانی یا همان بسط فوریه مورد نظر (سمت راست).

فوریه برای نقطه مورد نظر (C و D نیز نشان داده شده است. سپس موج فوریه نقطه مورد نظر (E)، نمودار سرعت-زمان نقطه مورد نظر با استفاده از نقشه به دست آمده از موج فوریه نقطه مورد نظر (F و G)، ردیابی و جابه‌جایی نقطه مورد نظر با انتگرال‌گیری سرعت به دست آمده از موج فوریه آن (H و I) نشان داده شده است.

در شکل ۷، نمایی شماتیک از ارسال موجی فراصوتی به سمت یک نقطه (A)، امواج بازگشتی و دنبال کردن همان نقطه در سه فاز مختلف، معادل با ترکیب موجی سینوسی و کوسینوسی با سه فرکانس متفاوت (B) نشان داده شده است. در نظر گرفتن مقادیر امواج سینوسی و کوسینوسی با فرکانس‌های متفاوت برای ساخت ترم‌های سری



شکل ۷. خمینه‌های پشت سر هم و مقطع پوانکاره (سمت چپ تصویر)، مسیر طی شده توسط یک نقطه در مقطع پوانکاره (سمت راست). منحنی‌های به دست آمده از نقشه پوانکاره علاوه بر ساخت ضابطه پوانکاره در مطالعه هندسه شیئی متحرکی که از کنار هم قرار دادن خمینه‌های پشت سر هم ظاهر می‌شود، اهمیت دارند.

۴.۲. گام دوم

برای محاسبه استرین نقطه‌ای در یک بازه زمانی $[t_1, t_0]$ ، اگر سرعت آن نقطه در زمان t_0 براساس فرمول داپلر V_1 باشد و V_1 سرعت همان نقطه در زمان t_1 و جابه‌جایی این نقطه در این بازه زمانی L باشد (شکل هشتم) با انتگرال گیری کسر اختلاف سرعت (در زمان‌های مختلف) بر میزان جابجایی، به مفهوم استرین می‌رسیم:

$$\text{Strain} \diamond \varepsilon = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\nabla V}{L} dt$$

منحنی‌های سرعت هر نقطه در طول زمان به دست می‌آیند. با توجه به این منحنی‌های سرعت و میزان سرعت هر نقطه در زمان، میزان جابه‌جایی و تغییر شکل^۱ (استرین^۲) نقاط بدست می‌آیند. نمودارهای جابه‌جایی نقاط توسط انتگرال گیری منحنی‌های سرعت به دست می‌آیند. میزان دفورماسیون یا کشیدگی نقاط در زمان، با انتگرال گیری از میزان سرعت افزایش و کاهش این جابجایی‌ها (معروف به جابه‌جایی‌های لاگرانژ) در طول زمان به دست می‌آیند (شکل ۸).

1. Deformation

2. Strain: a force tending to pull or stretch something to an extreme or damaging degree.

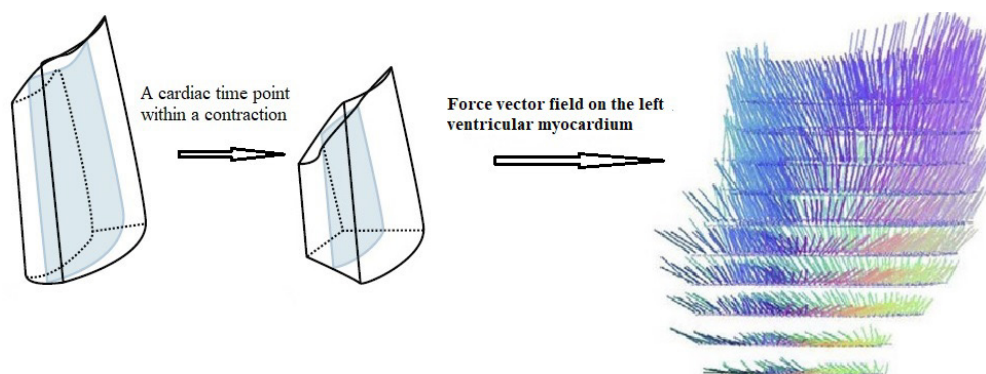


شکل ۸. یک تصویر اکوکاردیوگرافی از بطن چپ قلب، نقطه‌ای از دیواره بین بطنی در دو فاز مختلف

۳،۴. گام سوم

در زمان است و شتاب موضعی میزان تغییرات سرعت در جهت‌های X, Y و Z مشتق مولفه‌های سرعت در جهات مختلف است (شکل ۹).

معادله نیرو هر نقطه براساس شتاب کلی و شتاب موضعی آن نقطه فرمول‌بندی و محاسبه می‌شوند. شتاب کلی، میزان تغییرات سرعت



شکل ۹. انقباض یک نقطه آناتومیکال بروی عضله داخلی بطن چپ قلب و میدان برداری نیرو بروی آن (از چپ به راست). این نیرو بر حسب حرکت و دفورماسیون در زمان و در راستای گرادیان بردار سرعت است.

دست آمده از معادلات لاگرانژین بررسی و محاسبه می‌گردد و به صورت حاصلضرب زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$FC_{Lag} = (1 + A_{lag}z)(1 + B_{lag}z)(1 + C_{lag}z) \dots$$

۵،۴. گام پنجم

جریانی که توسط بردارهای ویژه لاپلاسین سرعت به دست می‌آیند (شکل ۱۰)، و بررسی بسط فوریه این جریان و محاسبه دقیق ضرایب آن از رابطه زیر:

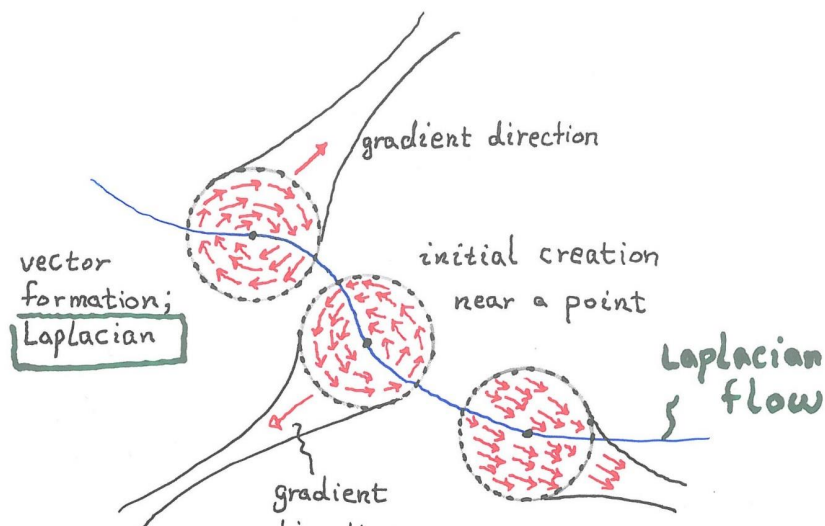
$$FC_{Lap} = (1 + A_{lap}z)(1 + B_{lap}z)(1 + C_{lap}z) \dots$$

بسط فوریه معادله حرکت به دست آمده از امواج بازگشتی را به صورت حاصلضرب نامتناهی زیر به طور دقیق بررسی می‌کنیم:

$$FC_{RW} = (1 + A_{rw}z)(1 + B_{rw}z)(1 + C_{rw}z) \dots$$

۴،۴. گام چهارم

منحنی‌های مسیرهای حرکتی نقاط، براساس معادلات لاگرانژین. طبق اصل لاگرانژ خم به دست آمده توسط یک نقطه، بروی مسیری است که آن نقطه کم‌ترین انرژی را حین حرکت مصرف کند. نقاط تکین تابع انتگرال لاگرانژی، همین منحنی‌ها هستند که با حل معادلات لاگرانژی به دست می‌آیند. بسط فوریه منحنی به



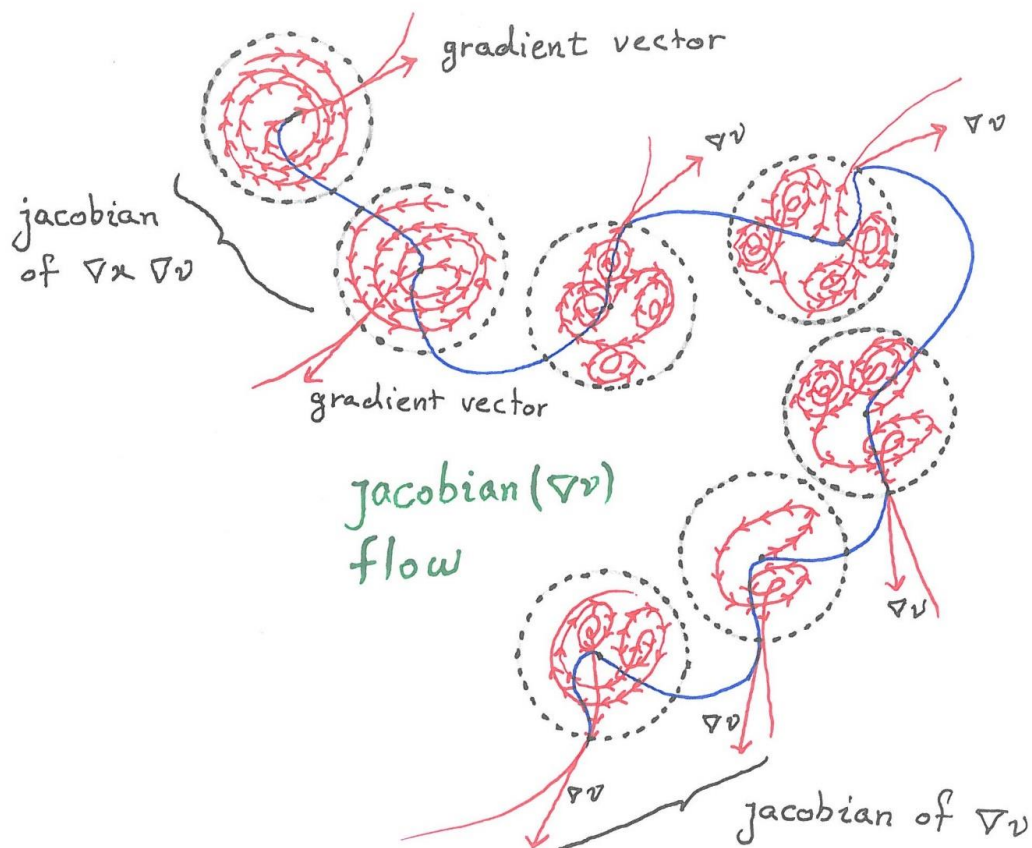
شکل ۱۰. جریان به دست آمده توسط مقادیر ویژه لاپلاسیان میدان برداری سرعت.

۶،۴. گام ششم

ضرایب آن از رابطه زیر:

$$FC_{JG} = (1 + A_{JGZ})(1 + B_{JGZ})(1 + C_{JGZ}) \dots$$

جریانی که توسط بردارهای ویژه ژاکوبین گرادیان سرعت به دست می‌آیند (شکل ۱۱). بررسی بسط فوریه این جریان و محاسبه دقیق



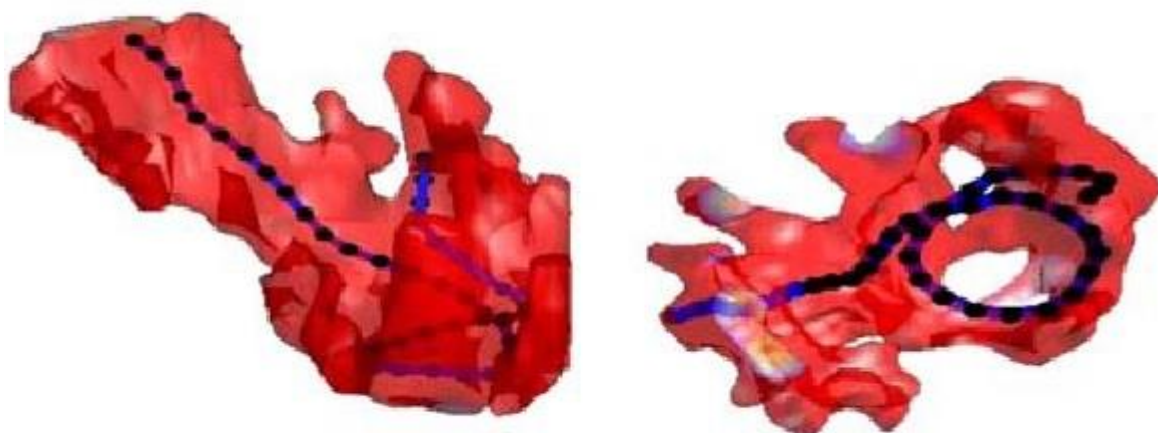
شکل ۱۱. جریان به دست آمده توسط مقادیر ویژه ژاکوبین گرادیان میدان برداری سرعت که خمیدگی بردارهای سرعت را بیان می‌کنند.

۷.۴. گام هفتم

حاصلضرب نامتناهی رابطه زیر به طور دقیق بررسی و تحلیل می‌کنیم، شکل ۱۲.

بسط فوریه حاصل از تعامل منحنی‌های به دست آمده از گام‌های قبل را در نظر می‌گیریم و ضابطه نگاشت پوانکاره را به صورت

$$FC_{Poincare Map} \mathbb{R}^3 (1 + A_{rw}z)(1 + B_{rw}z)(1 + C_{rw}z) \dots (1 + A_{lag}z)(1 + B_{lag}z)(1 + C_{lag}z) \dots (1 + A_{lap}z)(1 + B_{lap}z)(1 + C_{lap}z) \dots (1 + A_{JG}z)(1 + B_{JG}z)(1 + C_{JG}z) \dots$$



شکل ۱۲. نگاشت پوانکاره بروی نقطه‌ای از دیواره بین بطنی قلب. منحنی مورد نظر از سری فوریه به دست آمده در گام هفتم؛ حرکت از نقطه‌ای در دیواره سپتوم بین بطنی شروع شده، در ناحیه آپیکال قلب حرکتی چرخشی می‌کند و به سمت دیواره آزاد بطن چپ به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۸.۴. کوهمولوژی

فرض کنیم V فضای میدان‌های برداری با کرل صفر بروی خمینه سه-بعدی $X \setminus \mathbb{R}^3$ و W زیر فضای توابع پتانسیل پذیر بروی $X \setminus \mathbb{R}^3$ باشند.

اینک به بررسی فضای میدان‌های برداری با کرل صفر و زیر فضای پتانسیل پذیر آنها بروی نواحی خاصی در صفحه مختصات ۳-بعدی دکارتی و مطالعه فضای خارج قسمت به دست آمده می‌پردازیم.

$$V = \{F = \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \text{Curl } F = \nabla \times F = 0\}$$

$$W = \{F = \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 ; F = \nabla \cdot g \text{ for some smooth real valued function on } \mathbb{R}^3 \setminus X\}$$

$$X_0 = \{(x, y, z); x = y = 0\}$$

میدان برداری F_0 را بر روی خمینه مورد نظر با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_0 = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right);$$

براحتی می‌توان نشان داد که کرل میدان برداری فوق صفر است ولی یک میدان برداری پتانسیل پذیر نیست چون کار انجام شدن توسط آن بروی دایره واحد در صفحه X و Y ناصفر و مقدار آن 2π است.

به راحتی می‌توان نشان داد که W یک زیر فضای برداری V است. در ادامه هدف اصلی ما در این مقاله بررسی بعد فضای خارج قسمتی V/W است و معرفی اعضای پایه آن است. می‌دانیم که کار انجام شده توسط یک میدان برداری پتانسیل پذیر به مسیر بستگی ندارد یا به عبارتی کار انجام شده آن روی هر لوپ توسط آن میدان برداری، صفر است (تعریف پتانسیل پذیری). نشان خواهیم داد که فضای خارج قسمتی V/W کاملاً وابسته به X در خمینه $X \setminus \mathbb{R}^3$ است. اگر X تهی باشد بنا بر قضیه استوکس فضای خارج قسمتی V بروی W صفر-بعدی خواهد بود. این فضای خارج قسمتی را در برخی از مثال‌های خاص بررسی می‌کنیم. فرض کنیم X محور حقیقی Z باشد.

کنید مسیر P_X یک مسیر هموار داخل خمینه فوق از X_0 به X باشد.

ب۲: تابع $g(x)$ را کار انجام شده توسط میدان برداری F بروی این مسیر تعریف می‌کنیم.

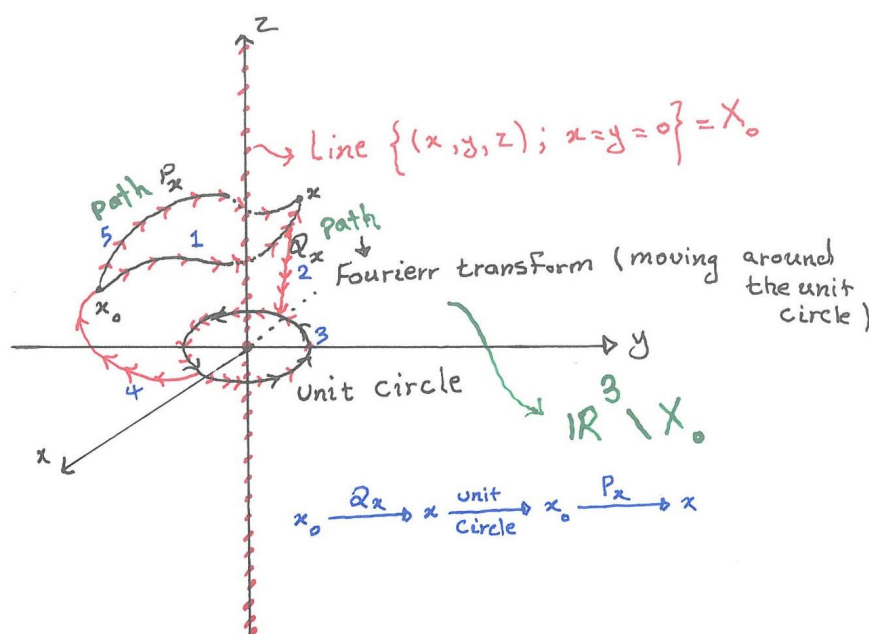
میدان برداری F گرادیان تابع g است. به عبارت دیگر کار انجام شده توسط میدان برداری F مستقل از مسیر است. برای اثبات این ادعا فرض کنید که Q_X مسیر دیگری باشد که X_0 را به X وصل می‌کند. مسیر Q_X را به طور پیوسته به صورت زیر به مسیر P_X تغییر شکل می‌دهیم. با چند بار چرخیدن (فرکانس) روی دایره واحد در صفحه X و Y (سایه‌های نقاط روی خم Q_X را روی موج‌های سینوسی و کوسینوسی با فرکانس‌های مختلف در نظر بگیرید: بسط سری فوریه Q_X) و با طی کردن مسیر P_X ، می‌توان از X_0 به X رسید. به عبارت دیگر با نوشتن بسط فوریه خم Q_X حرکت بروی مسیر P_X این کار را می‌توان انجام داد، شکل ۱۳.

حال فرض کنید F یک میدان برداری بروی خمینه فوق باشد که کرل آن صفر و کار انجام شده توسط آن بر روی دایره واحد در صفحه ایکس و وای (چه در جهت عقربه‌های ساعت چه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) نیز صفر است. نشان خواهیم داد که در این صورت، میدان برداری F پتانسیل پذیر است. همچنین نشان خواهیم داد که میدان برداری F به صورت گرادیان یک تابع هموار بروی خمینه معرفی شده است.

تابع g را بروی خمینه فوق که با برداشتن محور Z را از $\mathbb{R}^3$ ساخته شده بدین صورت می‌سازیم: الف: X_0 را یک نقطه دلخواه خارج از محور Z در این خمینه ثابت در نظر می‌گیریم.

ب: تابع هموار حقیقی مقدار g را بروی این خمینه به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

ب۱: نقطه دلخواه X را بروی این خمینه در نظر بگیرید و فرض

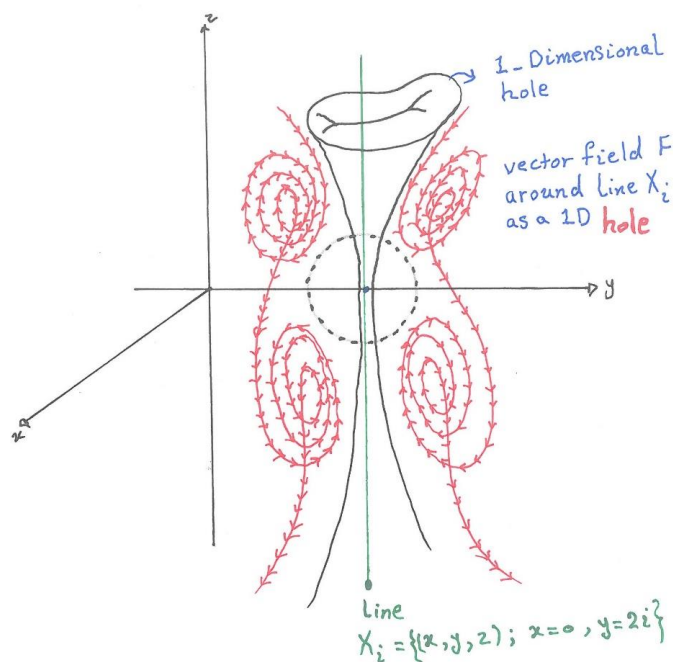


شکل ۱۳. کار انجام شده توسط میدان برداری F .

خواهد بود. بنابراین فضایی خارج قسمتی V بروی W یکریخت با خط حقیقی خواهد بود و در نتیجه یک-بعدی است و توسط میدان برداری F_0 تولید می‌شود.

با کمی دقت نظر متوجه می‌شویم که بعد فضایی خارج قسمتی V بروی W بستگی به همان یک خطی دارد که از $\mathbb{R}^3$ برداشیم و خمینه $\mathbb{R}^3$ منهای آن خط را ساختیم. این یک خط در خمینه ما یک حفره یک-بعدی ایجاد کرده است. به عبارتی دیگر خمینه ما یک خمینه هموار در $\mathbb{R}^3$ با یک حفره یا یک چاله یک-بعدی است (شکل ۱۴).

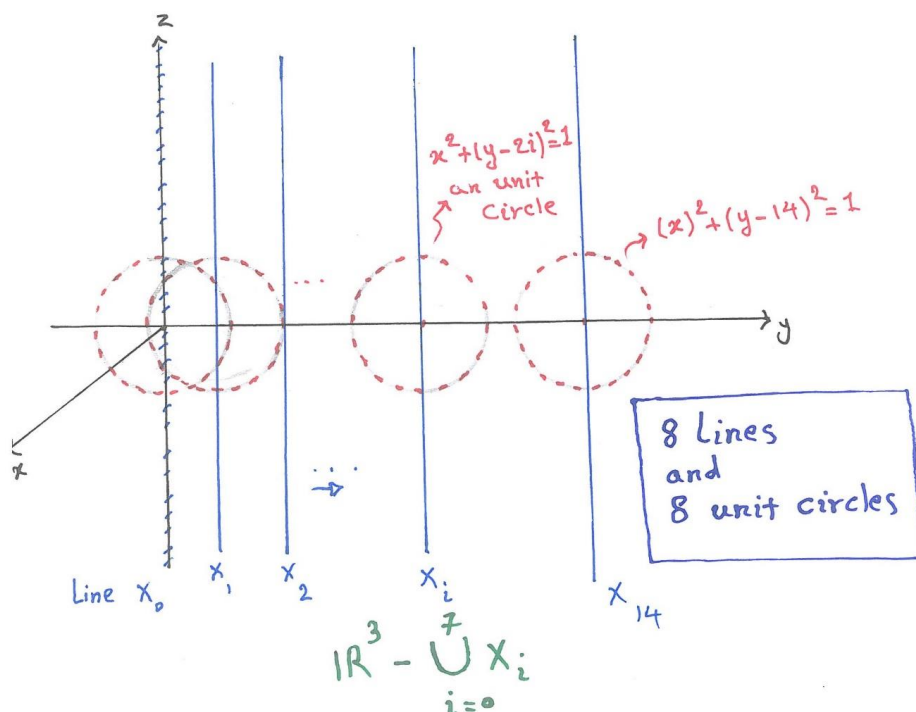
چون کار انجام شده توسط میدان برداری F ، فرض شده بر روی دایره ای واحد، صفر است پس کار انجام شده میدان برداری F بر روی مسیر Q_X همان کار انجام شده بروی مسیر تغییر شکل داده شده بالا است؛ این نیز همان کار انجام شده توسط F بروی خم P_X است. در نتیجه اثبات کردیم که میدان برداری F پتانسیل پذیر و برابر با گرادیان تابع g است. حال عملگر خطی f را بروی فضای برداری V به صورت کار انجام شده بروی دایره واحد در صفحه مختصات دکارتی X و Y تعریف می‌کنیم. بنا بر آنچه بالا ادعا کردیم و ثابت کردیم هسته عملگر خطی f همان فضای برداری



شکل ۱۴. خمینه R^3 منهای یک خط و ایجاد یک حفره یک-بعدی.

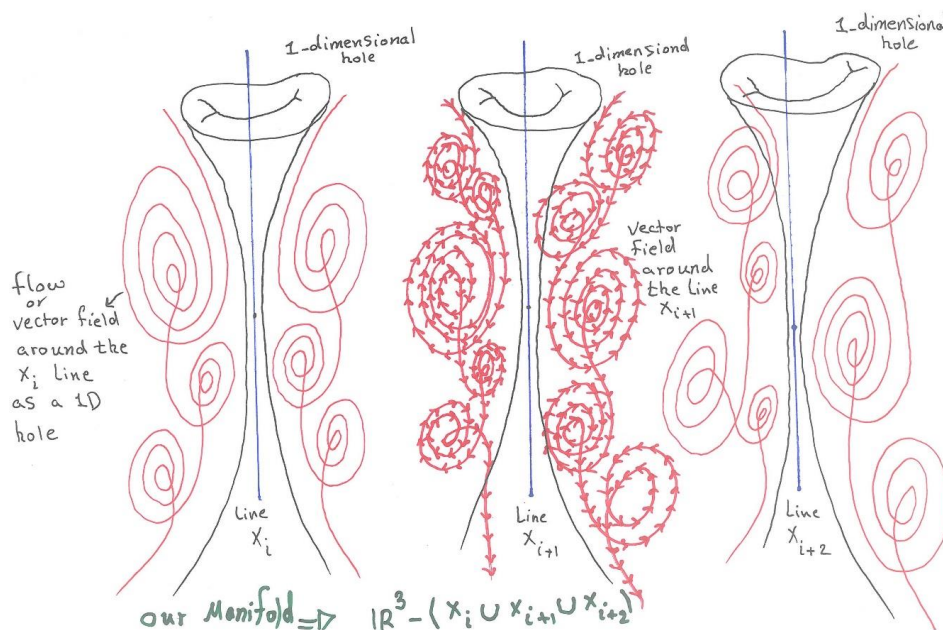
اعضای پایه آن فضای خارج قسمتی توسط میدان‌های برداری ساخته می‌شوند که کار انجام شده آنها بر روی دایره‌ای در صفحه XOT که آن خط‌ها از مرکز آن می‌گذرند، صفر باشند (شکل ۱۵).

حال اگر خمینه‌ای را در R^3 طوری در نظر گیرید که از برداشتن هشت خط به موازای با محور Z به دست آمده باشد. به راحتی توسط ترفند فوق می‌توان نشان داد که بعد فضای خارج قسمتی V بر روی W، ۸ است.



شکل ۱۵. خمینه R^3 منهای هشت خط و ایجاد هشت حفره یک-بعدی.

همان طور که مشاهده می‌کنیم بعد فضای خارج قسمتی V بر روی W روی خمینه‌های مورد نظر ما همان تعداد حفره‌های یک-بعدی خمینه مورد نظر است (شکل ۱۶).



شکل ۱۶. فضای خارج قسمتی مورد مطالعه، همان گروه درام کوهومولوژی اول

به چکه‌ای از سه چشمه بی‌نظیر یعنی اویلر، لاگرانژ و پوانکاره پرداختیم. در ظاهر هر یک از این سه دیدگاه در جهان خود سیر می‌کند. یکی در عبارت‌های جبری، یکی در مکانیک آسمانی، و دیگری در سیستم‌های دینامیکی. ولی وقتی به یک مسئله مهم در فناوری امروز، یعنی دینامیک قلب، می‌نگریم و قرار است که با حداقل داده‌ها رفتار آن را بیازماییم، می‌بینیم که این سه دیدگاه به گونه‌ای عجیب‌انگیزی در هماهنگی با هم، رازهای بسیاری را آشکار می‌سازند. ترکیبی از عدد، دینامیک، و برش، ایده‌ای خلاقانه درباره استنباطی محاسباتی با کاربرد بالینی وسیع به ما می‌دهد.

در حقیقت این فضای خارج قسمتی مورد مطالعه، همان گروه دورام کوهومولوژی^۱ اول (-فرم‌های بسته بر روی -فرم‌های دقیق که همان گرادیان توابع همواراند) روی خمینه ما است. به عبارتی دیگر همزمان، اطلاعاتی از هندسه خمینه مورد نظر ما در این فضای خارج قسمتی از میدان‌های بُرداری با کرل صفر دیده می‌شوند. این نگاه هانری پوانکاره است.

گفتار پایانی

در این مقاله به برگی از سرچشمه خلاقیت‌های ریاضی مربوط

منابع

1. Euler, *Introduction to analysis of the infinite*, Book 1, Springer, 1988.
2. Keith, R. Symon. *Mechanics*. Addison Wesley, 1971.
3. Laplace, P. S., *A treatise of celestial mechanics*. Translated from French and elucidated with explanatory notes. By the Rev, Henry H. Harte, F.T.C.D M.R.I.A, 1822.
4. Newton, Isaac, *The mathematical principals of natural philosophy*. Translated into English by Andrew Motte. New-York. Published by DANIEL ADEF. 1846.
5. Arnold V.I., Hugnes And Barrow, Newton And Hooke, Birkhauser Verlag, Basel. Boston. Berlin, 1990.